KAPITOLA 10

MATICOVÉ HRY S NULOVÝM SOUČTEM A MINMAX

V této kapitole se omezíme na speciální, ale velmi důležitou třídu tzv. dvouhráčových her: *hry s nulovým součtem*, které lze zapsat pomocí jediné reálné matice. Ukážeme, že hledání jejich optimálních smíšených strategií lze převést na řešení dvojice navzájem duálních lineárních programů. To poskytuje jak efektivní algoritmus, tak i velmi čisté propojení teorie her a teorie lineárního programování.

1 Maticová hra s nulovým součtem

V této kapitole chceme ukázat, jak se lineární programování přirozeně objevuje v jednoduchém modelu strategické interakce dvou hráčů. Představme si situaci typu „já proti tobě“: dva hráči si současně zvolí nějakou akci a podle kombinace těchto akcí jeden získá určitý počet bodů (nebo např. peněz, interpretace je na nás) a druhý přesně o stejný počet přijde.

- Pokud známe všechny možné akce obou hráčů a pro každou dvojici akcí umíme říct, kdo kolik „vyhraje“ nebo „prohraje“, mluvíme o *hře v normální (strategické) formě.*
- Pokud navíc platí, že zisk jednoho je přesně ztráta druhého, jde o *hru s nulovým součtem.*
- Když jsou obě množiny akcí konečné, můžeme celou hru zapsat jednou *maticí*, proto často říkáme *maticová hra.*

Na následujícím příkladu naznačíme, co si pod maticovou hrou s nulovým součtem lze představit.

Příklad 10.1: Pašerák a celní kontrola

Pašerák se snaží převézt nelegální zboží z Rakouska do ČR. Má na výběr dvě trasy:

- **Trasa 1** – vedlejší silnice přes málo frekventovaný přechod,
- **Trasa 2** – dálnice, kde by v případě úspěchu mohl převézt mnohem více zboží.

Celní správa má jen jednu mobilní hlídku, kterou každý den pošle buď na vedlejší silnici, nebo na dálnici. Hlídka neví, kterou trasu si pašerák ten den zvolí, a pašerák neví, kde přesně bude hlídka. Rozhodují se tedy *souběžně*, bez znalosti tahů toho druhého.

Označme:

- řádkový hráč = celní správa,
- sloupcový hráč = pašerák,
- řádky: R_1 = hlídka na vedlejší silnici, R_2 = hlídka na dálnici,
- sloupce: C_1 = pašerák jede vedlejší silnicí, C_2 = pašerák jede dálnicí.

Následující tabulka popisuje *zisk pašeráka* (například v desítkách tisíc korun):

$$A = \begin{array}{l|cc} & C_1 \text{ (vedlejší)} & C_2 \text{ (dálnice)} \\ \hline R_1 \text{ (hlídka na vedlejší)} & 0 & 6 \\ R_2 \text{ (hlídka na dálnici)} & 2 & 0 \end{array}$$

Číslo a_{ij} v tabulce je zisk pašeráka, pokud celní správa zvolí řádek R_i a pašerák sloupec C_j. Hra je *s nulovým součtem*: zisk pašeráka je zároveň ztráta celní správy, takže užitek celní správy je $-a_{ij}$.

Jak by se měli oba hráči chovat?

- Kdyby celní správa *vždy* hlídala jen jednu trasu, pašerák by se okamžitě přizpůsobil a jezdil by tou druhou.
- Kdyby pašerák *vždy* jezdil jen po dálnici, celní správa by měla jasno a posílala by hlídku na dálnici.

Je tedy rozumné, aby oba hráči nějakým způsobem *náhodně střídali* své možnosti (volili takzvané *smíšené strategie*), tak aby protistraně „znepříjemnili“ život. V této konkrétní hře se ukáže, že existuje rovnováha, ve které

- pašerák volí vedlejší silnici C_1 s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ a dálnici C_2 s pravděpodobností $\frac{1}{4}$,
- celní správa posílá hlídku na vedlejší silnici R_1 s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ a na dálnici R_2 s pravděpodobností $\frac{3}{4}$.

Ani jeden z hráčů si nemůže jednostranně polepšit tím, že změní své pravděpodobnosti. Takto vyvážené řešení není náhodou, plyne z hlubších teoretických výsledků. V další části kapitoly uvidíme, že právě hledání takových optimálních pravděpodobností lze elegantně přepsat jako úlohu lineárního programování.

Z pohledu lineárního programování je na těchto hrách zajímavé, že:

1. nejlepší (optimální) chování hráčů lze popsat jako řešení určitých optimalizačních úloh,
2. tyto úlohy lze přepsat jako lineární programy a jejich duály, což odpovídá i obecnějšímu výsledku z teorie here, tzv. Minimaxové větě.

Než ukážeme, že „hledání rozumné strategie ve hře“ je v tomto speciálním případě totéž jako řešení LP, tak formálně popíšeme, co přesně maticová hra s nulovým součtem je.

Definice 10.2: Hra v normální formě

(Konečná) hra v normální formě je trojice

$$G = (P, A, u),$$

kde:

- P je konečná množina hráčů;
- $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ je množina všech *profilů akcí*, kde A_i je množina akcí hráče i;
- $u = (u_1, \ldots, u_n)$ je n-tice *užitkových (výplatních) funkcí*, $u_i : A \to \mathbb{R}$, kde $u_i(a)$ je užitek hráče i při profilu akcí $a \in A$.

V dalším se omezíme na hry se dvěma hráči. Pro přehlednost je budeme nazývat *řádkový hráč* a *sloupcový hráč* a jejich akce si očíslujeme:

$$R = \{1, \ldots, m\}, \qquad C = \{1, \ldots, n\}.$$

Profil akcí je tedy dvojice (i, j), kde i je zvolený řádek a j zvolený sloupec.

Definice 10.3: Hra s nulovým součtem v maticové formě

Dvouhráčová hra v normální formě

$$G = (\{\text{řádkový hráč}, \text{sloupcový hráč}\}, R \times C, u)$$

je *hra s nulovým součtem*, pokud pro každý profil akcí $(i, j) \in R \times C$ platí

$$u_{\text{řádkový}}(i, j) + u_{\text{sloupcový}}(i, j) = 0.$$

Protože nás zajímá jen relativní zisk mezi hráči, můžeme celou hru popsat jedinou *výplatní maticí* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Každý prvek

$$a_{ij} = u_{\text{sloupcový}}(i, j)$$

chápeme jako *platbu od řádkového hráče sloupcovému hráči.* Kladná hodnota a_{ij} znamená, že sloupcový hráč vyhrává (řádkový platí jemu), záporná hodnota naopak.

Z podmínky nulového součtu okamžitě plyne, že užitek řádkového hráče je vždy $-a_{ij}$. Celou hru tedy reprezentuje jediná matice A, která popisuje „kolik zaplatí řádkový hráč sloupcovému“ v každé kombinaci voleb.

Poznámka 10.4: Maticová hra a notace

V dalším budeme používat označení:

- *řádky* $1, \dots, m$ jsou akce řádkového hráče,
- *sloupce* $1, \dots, n$ jsou akce sloupcového hráče,
- matice A je *výplatní matice* sloupcového hráče.

Tomuto nastavení se v literatuře říká maticová hra (*matrix game*) a je to standardní model dvouhráčové hry s nulovým součtem.

V tuto chvíli umíme popsat, co se stane, pokud si každý hráč vybere konkrétní řádek/sloupec (tzv. *čistá strategie*, tedy volba jedné akce z konečné množiny). Z pohledu strategie ale často dává smysl volit akce náhodně, například ve hře kámen–nůžky–papír: kdyby jeden hráč opakoval stále stejný tah, druhý ho snadno „přečte“. K tomu potřebujeme pojem *smíšené strategie.*

2 Smíšené strategie a očekávaná výplata

Intuitivní představa smíšené strategie je jednoduchá: hráč si nepředepisuje „vždy hraj řádek 3“, ale „řádek 1 hraj s pravděpodobností 40 %, řádek 2 s pravděpodobností 30 %, řádek 3 s pravděpodobností 30 %“. Tím vnáší do hry náhodu a brání protistraně v předvídání.

Formálně smíšená strategie je právě *pravděpodobnostní rozdělení* na množině čistých strategií.

Definice 10.5: Smíšená strategie a pravděpodobnostní simplex

Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nazveme *stochastický* (též *pravděpodobnostní vektor*), pokud

$$x_j \geq 0 \quad \text{pro všechna } j \qquad \text{a} \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1.$$

Množinu všech takových vektorů délky n označíme

$$S_n = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \mathbf{x} \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1\Big\}.$$

- *Smíšená strategie sloupcového hráče* je vektor $\mathbf{x} \in S_n$, kde x_j je pravděpodobnost, že zvolí sloupec j.
- *Smíšená strategie řádkového hráče* je vektor $\mathbf{y} \in S_m$, kde y_i je pravděpodobnost, že zvolí řádek i.

Poznámka 10.6: Pravděpodobnostní simplex je skutečně simplex

Množinu S_n lze chápat jako konvexní obal vektorů kanonické báze $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$. Každý stochastický vektor $\mathbf{x} \in S_n$ totiž splňuje

$$x = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n,$$

kde součinitelé x_j jsou nezáporné a sečtou se na 1. To znamená, že S_n je přesně množina všech konvexních kombinací vrcholů $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, tedy $(n-1)$-rozměrný *simplex*.

Čistá strategie je zvláštní případ smíšené strategie. Jde o vektor, který má v jedné souřadnici hodnotu 1 a ve všech ostatních 0. Smíšené strategie nám tedy jen „rozšíří“ prostor možných strategií o konvexní kombinace čistých.

2.1 Očekávaná výplata

Značení 10.7: Pravděpodobnost a střední hodnota

Budeme pracovat s prvky elementární pravděpodobnosti.

- Symbolem $\mathbb{P}[\cdot]$ budeme označovat *pravděpodobnost* daného jevu.
- Symbolem $\mathbb{E}[\cdot]$ budeme označovat *střední hodnotu* (očekávanou hodnotu) náhodné veličiny.

Pokud řádkový hráč hraje smíšenou strategii $\mathbf{y} \in S_m$ a sloupcový hráč $\mathbf{x} \in S_n$, pak pravděpodobnost, že nastane konkrétní profil akcí (i, j), je

$$\mathbb{P}[(i,j)] = \mathbb{P}[\text{řádek } i] \cdot \mathbb{P}[\text{sloupec } j] = y_i x_j.$$

Výplata sloupcového hráče při výsledku (i, j) je a_{ij}. *Očekávanou výplatu* sloupcového hráče (tj. střední hodnotu výplat, kdyby se hra hrála znovu a znovu se stejnými strategiemi $\mathbf{x}, \mathbf{y}$) dostaneme sečtením přes všechny možné výsledky, váženým jejich pravděpodobnostmi:

$$\mathbb{E}[\text{výplata sloupcového hráče}] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}[(i,j)]}_{y_i x_j} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i\, a_{ij}\, x_j.$$

Tento dvojitý součet lze zapsat elegantně maticově. Vektor $\mathbf{y}$ chápeme jako sloupcový vektor délky m, $\mathbf{x}$ jako sloupcový vektor délky n, potom

$$\mathbb{E}[\text{výplata sloupcového hráče}] = \mathbf{y}^\top A\mathbf{x}.$$

Protože hra má nulový součet, očekávaná výplata řádkového hráče je

$$\mathbb{E}[\text{výplata řádkového hráče}] = -\,\mathbf{y}^\top A\mathbf{x}.$$

Poznámka 10.8: Zisk vs. ztráta

Z pohledu sloupcového hráče je číslo $\mathbf{y}^\top A\mathbf{x}$ jeho *očekávaný zisk*, zatímco z pohledu řádkového hráče je to *očekávaná ztráta*. Je tedy přirozené, že:

- sloupcový hráč se snaží $\mathbf{y}^\top A\mathbf{x}$ *maximalizovat*,
- řádkový hráč se snaží $\mathbf{y}^\top A\mathbf{x}$ *minimalizovat*.

Podstata maticové hry s nulovým součtem je právě v tomto konfliktu clů jednotlivých hráčů. Jedno a totéž číslo je kritériem pro oba hráče, ale jeden ho chce co největší a druhý co nejmenší.

3 Max–min, min–max a hodnota hry

Pro danou strategii jednoho hráče se druhý hráč bude chovat tak, aby si maximalizoval (nebo minimalizoval) svůj očekávaný užitek. To vede na pojmy *max–min*, *min–max* a *hodnota hry*.

3.1 Nejhorší případ pro danou strategii

Fixujme smíšenou strategii sloupcového hráče $\mathbf{x} \in S_n$. Pro každou možnou strategii řádkového hráče $\mathbf{y} \in S_m$ je očekávaná výplata sloupcového hráče rovna $\mathbf{y}^\top A\mathbf{x}$.

Dívejme se na situaci z pohledu sloupcového hráče. Chceme-li pro strategii x posoudit *nejhorší možný scénář*, kdy se řádkový hráč zachová co nejvíce proti sloupcovému hráči, díváme se na minimum této hodnoty přes všechny $\mathbf{y} \in S_m$:

$$\min_{\mathbf{y} \in S_m} \mathbf{y}^\top A\mathbf{x}.$$

To motivuje následující definici.

Definice 10.9: Funkce β a α.

Pro strategii sloupcového hráče $\mathbf{x} \in S_n$ definujeme

$$\beta(\mathbf{x}) \coloneqq \min_{\mathbf{y} \in S_m} \mathbf{y}^\top A\mathbf{x},$$

tj. nejhorší možná (nejmenší) očekávaná výplata sloupcového hráče, pokud hraje $\mathbf{x}$ a řádkový hráč reaguje optimálně.
Analogicky pro strategii řádkového hráče $\mathbf{y} \in S_m$ definujeme

$$\alpha(\mathbf{y}) \coloneqq \max_{\mathbf{x} \in S_n} \mathbf{y}^\top A\mathbf{x},$$

tj. nejhorší možnou (největší) očekávanou ztrátu řádkového hráče, pokud hraje $\mathbf{y}$ a sloupcový hráč reaguje optimálně.

Z definice okamžitě plyne

$$\beta(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}^\top A\mathbf{x} \leq \alpha(\mathbf{y}) \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in S_n,\ \mathbf{y} \in S_m,$$

protože pro daný pár $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ nemůže hodnota $\mathbf{y}^\top A\mathbf{x}$ být menší než minimum přes všechna $\mathbf{y}$ ani větší než maximum přes všechna $\mathbf{x}$.

3.2 Maximinové a minimaxové strategie, hodnota hry

Na základě funkcí $\beta(\mathbf{x})$ a $\alpha(\mathbf{y})$ nyní můžeme přesně formulovat, co znamená, že je určitá smíšená strategie „optimální v nejhorším případě".

Definice 10.10: Maximinová strategie, minimaxová strategie a hodnota hry

Smíšenou strategii $\mathbf{x}^* \in S_n$ nazveme *maximinovou strategií sloupcového hráče*, pokud maximalizuje jeho nejhorší možnou výplatu, tj.

$$\beta(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{y} \in S_m} \mathbf{y}^\top A\mathbf{x}^* = \max_{\mathbf{x} \in S_n} \beta(\mathbf{x}).$$

Analogicky smíšenou strategii $\mathbf{y}^* \in S_m$ nazveme *minimaxovou strategií řádkového hráče*, pokud minimalizuje jeho nejhorší možnou ztrátu:

$$\alpha(\mathbf{y}^*) = \max_{\mathbf{x} \in S_n} y^{*\top} A\mathbf{x} = \min_{\mathbf{y} \in S_m} \alpha(\mathbf{y}).$$

Číslo $v \in \mathbb{R}$ nazveme *hodnota hry*, pokud existují strategie $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ takové, že

$$\beta(\mathbf{x}^*) = v = \alpha(\mathbf{y}^*).$$

Intuitivně:

- sloupcový hráč si volbou $\mathbf{x}^*$ zaručí, že ani při nejhorší možné odpovědi protivníka neklesne jeho očekávaná výplata pod v,

- řádkový hráč si volbou $\mathbf{y}^*$ zaručí, že ani při nejhorším možném postupu soupeře nepřesáhne jeho ztráta v.

Z již zavedených definic plyne pro libovolnou hru vždy

$$\max_{\mathbf{x}\in S_n} \beta(\mathbf{x}) \;\le\; \min_{\mathbf{y}\in S_m} \alpha(\mathbf{y}).$$

V nulově-součtových maticových hrách však nastává překvapivě silná vlastnost: *obě hodnoty jsou ve skutečnosti stejné*. Formuluje to následující Minimaxová věta.

Věta 10.11: Minimaxová věta pro maticové hry s nulovým součtem

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je výplatní matice nulově-součtové dvouhráčové hry. Potom platí

$$\max_{\mathbf{x}\in S_n} \beta(\mathbf{x}) \;=\; \min_{\mathbf{y}\in S_m} \alpha(\mathbf{y}),$$

tedy existuje číslo $v \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\max_{\mathbf{x}\in S_n} \min_{\mathbf{y}\in S_m} \mathbf{y}^\top A\mathbf{x} \;=\; v \;=\; \min_{\mathbf{y}\in S_m} \max_{\mathbf{x}\in S_n} \mathbf{y}^\top A\mathbf{x}.$$

Číslo v nazýváme *hodnota hry*. Navíc existují smíšené strategie $\mathbf{x}^* \in S_n$ a $\mathbf{y}^* \in S_m$ splňující

$$\beta(\mathbf{x}^*) = v = \alpha(\mathbf{y}^*),$$

tj. $\mathbf{x}^*$ je maximinová strategie sloupcového hráče a $\mathbf{y}^*$ je minimaxová strategie řádkového hráče.

Číslo v je tedy hodnota hry a dvojice $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ tvoří optimální smíšené strategie obou hráčů. Tato rovnost je fundamentální vlastnost nulově-součtových her a později uvidíme, že plyne přímo z duality lineárního programování.

4 Formulace maticové hry jako lineárního programu

Nyní ukážeme, že problém sloupcového hráče „zvolit strategii $\mathbf{x}$, která maximalizuje jeho nejhorší možnou výplatu“, lze přepsat jako lineární program. Analogicky problém řádkového hráče vede na duální lineární program.

4.1 LP pro sloupcového hráče (max–min)

Připomeňme, že sloupcový hráč chce maximalizovat funkci $\beta(\mathbf{x})$:

$$\max_{\mathbf{x}\in S_n} \beta(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\in S_n} \min_{\mathbf{y}\in S_m} \mathbf{y}^\top A\mathbf{x}.$$

Pro fixovanou strategii $\mathbf{x}$ závisí výraz $\mathbf{y}^\top A\mathbf{x}$ na $\mathbf{y}$ jen lineárně. Minimum přes simplex S_m je proto dosaženo v některém jeho vrcholu, tj. v některé čisté strategii řádkového hráče. Označíme $\mathbf{e}_i$ i-tý vektor kanonické báze v $\mathbb{R}^m$. Vzpomeňme, že čisté strategie odpovídají právě těmto vektorům. Pak dostáváme

$$\min_{\mathbf{y}\in S_m} \mathbf{y}^\top A\mathbf{x} = \min_{i=1,\dots,m} \mathbf{e}_i^\top A\mathbf{x}.$$

Sloupcový hráč tedy řeší max–min problém

$$\max_{\mathbf{x}\in S_n} \min_{i=1,\dots,m} \mathbf{e}_i^\top A\mathbf{x}.$$

Zaveďme proměnnou $t \in \mathbb{R}$, která bude dolní mezí všech hodnot $\mathbf{e}_i^\top A\mathbf{x}$. Podmínky

$$t \leq \mathbf{e}_i^\top A\mathbf{x} \qquad \text{pro } i = 1, \dots, m$$

zaručují, že $t \leq \min_i \mathbf{e}_i^\top A\mathbf{x}$, a maximalizace t tedy skutečně maximalizuje nejhorší možnou výplatu sloupcového hráče.

Aby byl vektor $\mathbf{x}$ přípustnou smíšenou strategií, musí splňovat:

$$x_j \geq 0 \quad \text{pro všechna } j, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1.$$

Dostáváme tedy lineární program pro sloupcového hráče:

LP pro sloupcového hráče

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizuj} & t \\ \text{při podmínkách} & t \leq (A\mathbf{x})_i = \mathbf{e}_i^\top A\mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \\ & x_j \geq 0 \quad \text{pro všechna } j. \end{array} \tag{LP$_C$}$$

Každé omezení $t \leq (A\mathbf{x})_i$ říká: „Pokud řádkový hráč zvolí čistou strategii i, očekávaná výplata sloupcového hráče je alespoň t.“ Maximalizace t se tedy snaží, aby i při nejhorší odpovědi řádkového hráče byla výplata co největší.

4.2 LP pro řádkového hráče (min–max)

Zcela symetricky lze formulovat problém řádkového hráče:

$$\min_{\mathbf{y}\in S_m} \max_{\mathbf{x}\in S_n} \mathbf{y}^\top A\mathbf{x}.$$

Podobně jako dříve pro fixované $\mathbf{y}$ platí

$$\max_{\mathbf{x}\in S_n} \mathbf{y}^\top A\mathbf{x} = \max_{j=1,\dots,n} (A^\top \mathbf{y})_j,$$

protože optimum lineární funkce v simplexu nastává v některém jeho vrcholu.

Zavedeme pomocnou proměnnou $u \in \mathbb{R}$, která bude horní mezí hodnot $(A^\top \mathbf{y})_j$. Podmínky

$$(A^\top \mathbf{y})_j \leq u \qquad \text{pro } j = 1, \dots, n$$

zajišťují, že $u \geq \max_j (A^\top \mathbf{y})_j$. Minimalizace u tedy minimalizuje nejhorší možnou výplatu sloupcového hráče, což je z pohledu řádkového hráče nejhorší možná ztráta.

Smíšená strategie řádkového hráče musí opět splňovat

$$y_i \geq 0 \quad \text{pro všechna } i, \qquad \sum_{i=1}^{m} y_i = 1.$$

Lineární program pro řádkového hráče tedy je:

LP pro řádkového hráče

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizuj} & u \\ \text{při podmínkách} & (A^\top \mathbf{y})_j \le u, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^m y_i = 1, \\ & y_i \ge 0 \quad \text{pro všechna } i. \end{array} \tag{LP$_R$}$$

4.3 Dualita: „primární = hráč 1, duální = hráč 2“

Primární úloha v maticovém tvaru

Máme k dispozici LP pro sloupcového hráče (LP$_C$). Ten budeme vnímat jako primární. Nejdříve zapíšeme tuto primární úlohu ve zkrácenějším tvaru a posléze pro ni odvodíme úlohu duální.

Zavedeme vektory

$$\mathbf{z} := \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad \mathbf{c} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1},$$

takže účelová funkce v primární úloze jde přepsat jako $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{z}$.

Označíme-li i-tý řádek matice A jako $\mathbf{a}_i^\top$, pak nerovnosti $t \le \mathbf{e}_i^\top A\mathbf{x} = \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}$ lze psát jako

$$(-\mathbf{a}_i^\top \;\; 1)\, \mathbf{z} \le 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Definujeme

$$B := \begin{pmatrix} -\mathbf{a}_1^\top & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\mathbf{a}_m^\top & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{d} := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1},$$

a úlohu přepíšeme ve tvaru

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizuj} & \mathbf{c}^\top \mathbf{z} \\ \text{při podmínkách} & B\,\mathbf{z} \le 0, \\ & \mathbf{d}^\top \mathbf{z} = 1, \\ & z_1, \dots, z_n \ge 0, \;\; z_{n+1} = t \text{ volná}. \end{array} \tag{P}$$

Duální úloha v maticovém tvaru

Připomeňme velmi stručně pravidla duality známé z předchozích kapitol, která využijeme nyní:

- primární omezení typu „$\le$“ $\longleftrightarrow$ duální proměnná ≥ 0,

- primární omezení typu „=“ $\longleftrightarrow$ duální proměnná bez omezení znaménka,
- primární proměnná ≥ 0 $\longleftrightarrow$ duální omezení typu „$\geq$“,
- primární proměnná volná $\longleftrightarrow$ duální omezení typu „=“,
- primárním cílem je „max“ $\longleftrightarrow$ duálním cílem je „min“.

Použitím těchto pravidel na (P) získáme:

- z nerovností $B\mathbf{z} \leq 0$ vektor duálních proměnných $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ s komponentami $y_j \geq 0$,
- z rovnosti $\mathbf{d}^\top \mathbf{z} = 1$ jednu duální proměnnou $u \in \mathbb{R}$ bez znaménkového omezení,
- duální účelovou funkci, kterou budeme minimalizovat.

Aby byl zápis duální úlohy co nejvíce symetrický s primární maticovou formulací, zavedeme vektory

$$\mathbf{w} := \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}, \qquad \mathbf{r} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1},$$

takže duální účelovou funkci můžeme psát jako skalární součin

$$\min \mathbf{r}^\top \mathbf{w}.$$

Koeficienty u primárních proměnných v duální úloze vznikají jako lineární kombinace řádků B a vektoru $\mathbf{d}$ s váhami $\mathbf{y}$ a u. Kompaktně je lze zapsat jako vektor

$$B^\top \mathbf{y} + u\,\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n+1},$$

který musí „odpovídat“ vektoru $\mathbf{c}$ a typu primárních proměnných:

- protože primární proměnné $z_1, \dots, z_n$ jsou nezáporné, musí v prvních n složkách platit nerovnosti typu „$\geq$“,
- poslední proměnná $z_{n+1} = t$ je volná, proto odpovídá duální rovnost.

Dostáváme tak kompaktní maticový tvar duální úlohy

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizuj} & \mathbf{r}^\top \mathbf{w} \\ \text{při podmínkách} & B^\top \mathbf{y} + u\,\mathbf{d} \;\geq\; \mathbf{c} \quad (\text{v prvních } n \text{ složkách}), \\ & (B^\top \mathbf{y} + u\,\mathbf{d})_{n+1} = c_{n+1}, \\ & \mathbf{y} \geq 0. \end{array} \tag{D}$$

V našem případě má výraz $B^\top \mathbf{y} + u\,\mathbf{d}$ konkrétní tvar

$$B^\top \mathbf{y} + u\,\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -A^\top \mathbf{y} + u\,\mathbf{1} \\ \sum_{i=1}^m y_i \end{pmatrix},$$

Duální podmínky tedy říkají

$$-A^\top \mathbf{y} + u\,\mathbf{1} \;\geq\; \mathbf{0}, \qquad \sum_{i=1}^m y_i = 1, \qquad \mathbf{y} \geq 0.$$

To je přesná maticová verze duální úlohy; její rozepsání po složkách vede k lineárnímu programu pro řádkového hráče odvozenému dříve z „min–max“ formulace.

Z obecných dualitních vět plyne, že obě úlohy mají stejnou optimální hodnotu $t^* = u^*$, což je právě hodnota hry. Proměnné primární úlohy popisují optimální smíšenou strategii jednoho hráče, proměnné duální úlohy strategii druhého – v tomto smyslu tedy platí heuristika „*primární = hráč 1, duální = hráč 2*“.

5 Krátký ilustrační příklad

Ukažme formulaci obou lineárních programů na jednoduché symetrické hře se dvěma strategiemi.

Příklad 10.12: priklad

Uvažujme maticovou hru se dvěma řádky a dvěma sloupci a výplatní maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hodnota a_{ij} je zde výplata sloupcového hráče, tj. kladné číslo znamená zisk sloupcového hráče, záporné číslo zisk řádkového hráče.

LP pro sloupcového hráče. Označme $x = (x_1, x_2)^\top$ smíšenou strategii sloupcového hráče. Podle (LP_C) má řešit úlohu

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizuj} & v \\ \text{při podmínkách} & v \leq (1, -1)\, x = x_1 - x_2, \\ & v \leq (-1, 1)\, x = -x_1 + x_2, \\ & x_1 + x_2 = 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

LP pro řádkového hráče. Označme $y = (y_1, y_2)^\top$ strategii řádkového hráče. Z (LP_R) dostáváme

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizuj} & u \\ \text{při podmínkách} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^\top y \leq u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ & y_1 + y_2 = 1, \\ & y_1, y_2 \geq 0. \end{array}$$

Po rozepsání prvního omezení dostaneme

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizuj} & u \\ \text{při podmínkách} & y_1 - y_2 \leq u, \\ & -y_1 + y_2 \leq u, \\ & y_1 + y_2 = 1, \\ & y_1, y_2 \geq 0. \end{array}$$

Díky symetrii matice A lze snadno ověřit, že optimální strategie obou hráčů je hrát obě čisté strategie se stejnou pravděpodobností:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^* = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)^\top,$$

a hodnota hry je $v = 0$. To je v souladu s tím, že hra je „férová“ (každý hráč má symetrické postavení).