KAPITOLA 9

DOPRAVNÍ PROBLÉM

Dopravní problém patří mezi nejklasičtější speciální úlohy lineárního programování. Modeluje situaci, kdy máme několik *zdrojů* (výrobců) se zadanými kapacitami, několik *odběratelů* s požadovanými odběry a známé *jednotkové náklady* přepravy mezi každou dvojicí zdroj–odběratel. Cílem je určit, kolik jednotek přepravíme po jednotlivých spojích tak, aby byly uspokojeny všechny požadavky a celkové náklady byly minimální.

V této kapitole ukážeme, že dopravní problém je zvláštní případ úlohy lineárního programování s velmi pravidelnou strukturou. Nejprve jej zapíšeme ve standardní minimalizační formulaci, poté stručně popíšeme jeho základní vlastnosti (počet omezení, bázická řešení, degenerace) a závěrem uvedeme speciální algoritmus pro nalezení optimálního řešení známý jako *metoda MODI* neboli *metoda potenciálů*.

1 Slovní zadání a notace

Dopravní problém patří mezi klasické a zároveň nejpraktičtější modely lineárního programování. Přirozeně se objevuje všude tam, kde je potřeba efektivně přiřadit zdroje k odběratelům a minimalizovat související náklady – od logistiky a distribuce zboží, přes plánování výroby, až po alokaci energie a podobně. Nejdříve danou úlohu formulujeme.

Uvažujme m dodavatelů (zdrojů) $S_1, \ldots, S_m$ a n odběratelů $D_1, \ldots, D_n$. Dodavatel S_i má k dispozici množství $s_i \geq 0$ (kapacita, zásoba), odběratel D_j požaduje množství $d_j \geq 0$ (poptávka). Pro každou dvojici (i, j) je dána jednotková cena (náklad) přepravy $c_{ij} \geq 0$.

Rozhodovací proměnné dopravního problému budeme značit

$$x_{ij} \;\geq\; 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n,$$

a budeme si je interpretovat jako množství přepravené ze zdroje S_i k odběrateli D_j.

Poznámka 9.1: Slovní zadání dopravního problému

Najít takové příděly $\{x_{ij}\}$, aby

- celková zásilka od zdroje S_i nepřekročila dostupnou zásobu s_i,
- celkový odběr u odběratele D_j pokryl požadovanou poptávku d_j,
- celkové přepravní náklady byly minimální.

V typické „čisté“ variantě dopravního problému budeme předpokládat, že *celá zásoba má být odvezena* a *celá poptávka má být uspokojena*. Formálně to znamená

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

2 Formulace dopravního problému jako LP

2.1 Kanonická (vyrovnaná) formulace

Začněme standardním případem, kdy je součet všech zásob stejný jako součet všech požadavků:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

Takovému zadání se často říká *vyrovnaný* (balanced) dopravní problém.

LP formulace dopravního problému

Pro vyrovnaný dopravní problém hledáme řešení minimalizační úlohy

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimalizovat} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\textbf{při} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, \qquad i = 1,\dots,m, \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \qquad j = 1,\dots,n, \\
& x_{ij} \geq 0 \qquad \text{pro všechna } i,j.
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

Vidíme, že jde o úlohu lineárního programování s mn proměnnými a $m+n$ rovnicemi (které však nejsou všechny nezávislé, viz níže).

2.2 Nevyrovnaná varianta dopravního problému

Vyrovnaná varianta dopravního problému má mnoho výhodných vlastností, v praxi často ale přirozeně nastává, že

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \neq \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

Tedy například součet zásob převyšuje součet poptávky (nevyužitá kapacita) nebo naopak. Taková varianta dopravního problému se pak nazývá *nevyrovnaná* (unbalanced). Dobrou zprávou je, že každý nevyrovnaný problém lze převést na problém vyrovnaný, jak je shrnuto v následující poznámce.

Poznámka 9.2: Vyrovnání dopravního problému

- Pokud $\sum_i s_i > \sum_j d_j$, přidáme do tabulky „fiktivního odběratele“ D_{n+1} s poptávkou

  $$d_{n+1} := \sum_{i=1}^{m} s_i - \sum_{j=1}^{n} d_j$$

  a jednotkovými náklady $c_{i,n+1}$ zvolenými jako 0 nebo jako velmi malé (neutrální) číslo. Proměnné $x_{i,n+1}$ pak reprezentují nevyužité zásoby.

- Pokud $\sum_i s_i < \sum_j d_j$, přidáme „fiktivního dodavatele“ S_{m+1} se zásobou

  $$s_{m+1} := \sum_{j=1}^{n} d_j - \sum_{i=1}^{m} s_i$$

  a náklady $c_{m+1,j}$, opět typicky 0.

V obou případech dostaneme rozšířený vyrovnaný dopravní problém ekvivalentní původnímu z hlediska reálných proměnných.

V dalším textu proto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že pracujeme s vyrovnanou verzí dopravního problému (9.1).

3 Struktura a vlastnosti dopravního problému

Matice omezení v (9.1) má velmi speciální strukturu. Každý řádek vyjadřuje součet přes jeden řádek tabulky, každý sloupec součet přes jeden sloupec tabulky. To má několik důsledků, které krátce rozebereme v této sekci.

3.1 Počet nezávislých omezení a bázická řešení

Nejprve ukažme, že některé z omezení musí být nutně lineárně závislé. Součet všech řádkových omezení (nabídkových) dává

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} s_i,$$

zatímco součet všech sloupcových omezení (poptávkových) dává

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

Levá strana obou rovností je totožná, jde pouze o jinak zapsaný dvojný součet. Ve vyrovnaném dopravním problému jsou stejné také pravé strany, tedy $\sum_i s_i = \sum_j d_j$.

Pro přehlednost nyní budeme vycházet od rozhodovacích proměnných a zavedeme v následující krátké části poněkud redundantní značení. Vezměme všech m „nabídkových“ omezení a n „poptávkových“ omezení a označme je po řadě $R_1, \dots, R_m$, respektive $C_1, \dots, C_n$, tedy

$$R_i : \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i,\ i = 1, \dots, m, \quad C_j : \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j\ j = 1, \dots, n,$$

v tomto smyslu platí $R_i, C_j \in \mathbb{R}^{mn}$. Z předešlého plyne, že

$$\left(\sum_{i=1}^{m} R_i\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} C_j\right) = 0.$$

To ale odpovídá netriviální lineární kombinaci řádků omezení takovou, že nakombinujeme nulu, lze vyvodit, že

$$h(A) \le m + n - 1.$$

Nyní ověříme, že žádná další lineární závislost mezi omezeními neexistuje, a hodnost je tedy rovna právě $m + n - 1$. Nezapomínejme, že budeme chtít sčítat vektory z $\mathbb{R}^{mn}$. Uvažujme lineární kombinaci

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i R_i \ + \ \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j C_j \ = \ (0, \dots, 0)^{\mathsf{T}}.$$

Každá proměnná x_{ij} se vyskytuje přesně v omezení R_i a (pokud $j < n$) v omezení C_j. Proto koeficient u x_{ij} v této lineární kombinaci je

$$\alpha_i + \beta_j \qquad (\text{pro } j < n),$$

a u proměnných x_{in}, které se v omezení C_n (jež jsme vynechali) nenacházejí, je koeficient roven pouze α_i. Aby celá lineární kombinace byla nulová, musí být všechny tyto koeficienty rovny nule. Z proměnných x_{in} tedy dostáváme

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0,$$

a dosazením do ostatních koeficientů dostáváme

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{n-1} = 0.$$

Jediná lineární kombinace daných $m+n-1$ rovnic, která dává nulu, je tedy triviální, což znamená, že uvedených $m+n-1$ rovnic je lineárně nezávislých.

Vím tedy, že bázické řešení je dáno volbou $m+n-1$ lineárně nezávislých sloupců matice A. Pro dopravní problém platí dále následující věta, kterou zde uvedeme bez důkazu:

Věta 9.3: Řešitelnost doprvního problému

Pro dopravní problém jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Úloha má bazický přípustný bod.
2. Úloha má optimální řešení.
3. Jedná se o vyrovnaný dopravní problém, tj. platí rovnost
$$\sum_{i=1}^{m} s_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

Rozebereme dále strukturu matice omezení. Ta má rozměr $(m+n) \times mn$ a přirozené blokové členění

$$A = \begin{pmatrix} A^{(S)} \\ A^{(D)} \end{pmatrix}, \qquad A^{(S)} \in \mathbb{R}^{m \times mn},\ A^{(D)} \in \mathbb{R}^{n \times mn},$$

kde blok $A^{(S)}$ obsahuje (nabídková) omezení

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

a blok $A^{(D)}$ (poptávková) omezení

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Každému políčku tabulky, tj. proměnné x_{ij}, odpovídá jeden sloupec matice A. Tento sloupec má právě dvě jedničky: jednu v řádku příslušného dodavatele S_i a jednu v řádku příslušného odběratele D_j, ostatní prvky jsou nulové.

Pro konkrétní případ se třemi dodavateli a třemi odběrateli dostaneme například

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

První tři řádky zde vyjadřují, že součet přes řádky tabulky dává nabídky s_1, s_2, s_3, další tři řádky vyjadřují, že součet přes sloupce dává poptávky d_1, d_2, d_3.

Poznamenejme, že je užitečné dívat se na dopravní problém jako na síťový model na bipartitním grafu. Vrcholy tvoří zdroje S_i a odběratelé D_j, hrana mezi S_i a D_j reprezentuje proměnnou x_{ij}.

Poznámka 9.4: Bipartitní graf

Bipartitní graf je graf, jehož množinu vrcholů lze rozdělit na dva disjunktní podmnožiny U a V tak, že každá hrana spojuje vrchol z U s vrcholem z V. Mezi vrcholy uvnitř téhož dílu tedy neexistují žádné hrany.
V dopravním problému tvoří přirozené dvě části množina zdrojů $\{S_1, \ldots, S_m\}$ a množina odběratelů $\{D_1, \ldots, D_n\}$. Struktura dopravní tabulky je tedy přesně strukturou bipartitního grafu.

Poznámka 9.5: Stromová struktura báze

Ukáže se (zde bez důkazu), že množina bázických buněk v dopravním problému odpovídá hranám, které tvoří *strom* v bipartitním grafu $\{S_1, \ldots, S_m\} \cup \{D_1, \ldots, D_n\}$: graf je souvislý a neobsahuje cyklus. I z toho plyne právě zmíněná hodnost $m+n-1$.

Řešení dopravního problému i hledání výchozího bazického přípustného bodu je často pro přehlednost organizováno v tabulkách podobných té následující. Sloupce této tabulky znázorňují jednotlivé odběratele, řádky jednotlivé prodejce. Při řešení dopravních úloh se běžně setkáme s vyplňováním pouze nenulových buněk tabulky. Buňky, pro které platí $x_{ij} = 0$, při výpočtech ponecháme prázdné. Prázdné buňky tabulky tak značí nebazické proměnné.

	D_1	D_2	D_3	nabídka
S_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	s_1
S_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	s_2
S_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	s_3
poptávka	d_1	d_2	d_3	$d_1 + d_2 + d_3$

3.2 Degenerace

Stejně jako u obecného LP může být bázické řešení dopravního problému *degenerované.*

Definice 9.6: Degenerace v dopravním problému

Bázické řešení dopravního problému nazveme *degenerované*, pokud má

$$\#\{(i, j) \mid x_{ij} > 0\} < m + n - 1.$$

V opačném případě je *nedegenerované.*

Degenerace v praxi znamená, že některé bázické buňky mají nulový příděl. V praktickým případech v některých metodách se degenerace často ošetřuje tak, že se do vybraných buněk vloží velmi malá kladná hodnota (symbolicky $\varepsilon > 0$), která zaručí jednoznačnost cyklů, ale numericky se s ní zachází jako s nulou. Pro potřeby této kapitoly postačí vědět, že degenerace může nastat, ale nemění správnost metod pro výpočet dopravního problému, pouze zkomplikuje implementační detaily.

4 Metoda MODI (metoda potenciálů)

Dopravní problém je možné řešit obecnou simplexovou metodou, ale vzhledem k jeho struktuře existují specializované algoritmy, které využívají jeho „tabulkovou“ povahu a jsou výrazně úspornější. Jedním z nich je *metoda MODI* (*Modified Distribution Method*), často nazývaná také *metoda potenciálů* nebo *u–v metoda.*

4.1 Počáteční bázické přípustné řešení

Metoda MODI předpokládá, že na vstupu máme BFS dopravního problému. V praxi se počáteční BFS získá např. jednou z následujících jednoduchých heuristik:

- *metoda severozápadního rohu* (North–West Corner),

- *metoda nejmenších nákladů* (Least Cost),
- *Vogelova aproximační metoda.*

Podrobnosti těchto konstrukcí pro náš účel nepotřebujeme; budeme předpokládat, že takové počáteční bázické řešení je dáno.

4.2 Potenciály a redukované náklady

Pro pohodlnost se někdy v dopravním problému nepracuje s bází jakožto s množinou indexů, nýbrž jako s kombinací indexů odpovídající jednotlivým buňkám v zjednodušeném tabulkovém zápisu úlohy, viz výše.

Nechť máme bázické přípustné řešení dopravního problému, tj. množinu bázických buněk $B \subseteq \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ o velikosti $|B| = m+n-1$. V degenerovaném případě mohou mít některé bázické příděly x_{ij} hodnotu 0.

Metoda MODI zavádí dvě sady pomocných veličin:

$$u_1, \ldots, u_m \quad \text{(potenciály řádků)}, \qquad v_1, \ldots, v_n \quad \text{(potenciály sloupců)}.$$

Pro každou buňku $(i, j) \in B$ zavedeme potenciály u_i a v_j tak, aby platilo

$$u_i + v_j = c_{ij}. \tag{9.2}$$

Bázické buňky tvoří strom v bipartitním grafu se $m+n$ vrcholy, a proto má tento strom právě $m+n-1$ hran. Lze argumentovat i výše rozeebranou lineární nezávislostí. Soustava rovnic (9.2) tedy obsahuje $m+n-1$ rovností pro $m+n$ neznámých $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$, a je proto určena až na přičtení jedné společné konstanty. Obvykle si libovolně zvolíme jeden potenciál, například $u_1 := 0$, a všechny ostatní potenciály poté jednoznačně dopočítáme z rovnic (9.2) podél hran stromu.

Poznámka 9.7: Proč právě rozklad $c_{ij} = u_i + v_j$?

V duální úloze k dopravnímu problému vystupují u_i a v_j jako duální proměnné k rovnicím pro nabídky S_i a poptávky D_j. Každá duální nerovnost má tvar $u_i + v_j \leq c_{ij}$, protože ve sloupci matice omezení pro proměnnou x_{ij} jsou právě dvě jedničky: jedna u řádku S_i a jedna u řádku D_j. Pro bázické buňky je tato nerovnost v optimu těsná, a proto zde klademe rovnost $u_i + v_j = c_{ij}$.

Jakmile máme potenciály u_i, v_j, definujeme pro každou (i nebázickou) buňku *redukované náklady* neboli *odchylky*

$$\Delta_{ij} \;:=\; c_{ij} - (u_i + v_j). \tag{9.3}$$

Optimalitní kritérium metody MODI

Uvažujme minimalizační dopravní problém (9.1) a bázické přípustné řešení s potenciály u_i, v_j a redukovanými náklady Δ_{ij} definovanými v (9.2)–(9.3). Pak platí:

- je-li $\Delta_{ij} \geq 0$ pro všechny (zejména nebázické) buňky, je dané bázické řešení *optimální*;
- existuje-li buňka s $\Delta_{ij} < 0$, lze provést zlepšovací krok, který sníží celkové náklady.

Intuitivně lze Δ_{ij} chápat jako „jednotkový přírůstek nákladů“, kdybychom chtěli do buňky (i, j) přidat malé množství přepravy a ostatní příděly upravit tak, aby zůstala zachována rovnost řádků a sloupců. Nezáporné odchylky tedy říkají, že žádnou lokální úpravou nelze náklady snížit, což je přesně charakteristika optima.

Poznámka 9.8: Souvislost se simplexovou metodou

V obecném LP vyjadřují redukované náklady, jak se změní hodnota účelové funkce při zavezení nebázické proměnné do báze (viz příslušná kapitola o simplexové metodě). Metoda MODI je v podstatě „simplex na míru“ pro speciální strukturu dopravních tabulek, kdy se potenciály u_i, v_j chovají jako duální proměnné a Δ_{ij} jako redukované náklady.

4.3 Zlepšovací krok a cyklus v tabulce

Předpokládejme, že pro dané bázické řešení existuje alespoň jedna buňka (p, q) s $\Delta_{pq} < 0$. Chceme zavést buňku (p, q) do báze, což odpovídá tomu, že x_{pq} zvětšíme z nuly na nějakou kladnou hodnotu. Aby se přitom zachovaly všechny řádkové a sloupcové sumy, musíme ostatní příděly přenastavit.

Geometricky se v bipartitním grafu po přidání hrany (p, q) vytvoří *jediný cyklus*. V tabulce se tento cyklus projeví jako uzavřený lámaný čtyřúhelník, šestiúhelník, ..., ve kterém se střídají obsazené buňky (s nenulovým x_{ij}) v řádcích a sloupcích.

Postup je následující:

1. Vybereme buňku (p, q) s nejnižší (nejvíce zápornou) odchylkou $\Delta_{pq} < 0$ a dočasně ji označíme jako bázickou.

2. V tabulce najdeme uzavřený cyklus procházející buňkou (p, q) tak, že se střídají horizontální a vertikální kroky a v každém „zlomu“ leží bázická buňka.

3. Buňky v cyklu střídavě označíme znaménky $+$ a $-$, počínaje $+$ v buňce (p, q).

4. Spočítáme
$$\theta := \min\{x_{ij} \mid (i, j) \text{ leží na cyklu se znaménkem -}\},$$
tj. nejmenší příděl na buňkách označených $-$.

5. Všem buňkám se znaménkem $+$ zvětšíme příděl o θ, všem buňkám se znaménkem $-$ příděl o θ zmenšíme. Některá z „minusových“ buněk se tím vynuluje a opustí bázi, buňka (p, q) se naopak stane bázickou s přídělem θ.

Příklad 9.9: Metoda MODI na konkrétním dopravním problému

Uvažujme dopravní problém se třemi zdroji S_1, S_2, S_3 a třemi odběrateli D_1, D_2, D_3. Nabídky, poptávky i jednotkové náklady c_{ij} jsou dány

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 7 & 11 & 11 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix}, \qquad (s_1, s_2, s_3) = (15, 17, 18), \qquad (d_1, d_2, d_3) = (20, 10, 20).$$

Hledáme plán přeprav, který minimalizuje celkové náklady.
Předpokládejme, že některou z konstrukčních heuristik (např. metodou nejmenších nákladů) jsme již získali počáteční bázické přípustné řešení. Tomu odpovídají příděly

$$x_{11} = 2, \quad x_{12} = 10, \quad x_{13} = 3, \quad x_{23} = 17, \quad x_{31} = 18,$$

ostatní x_{ij} jsou nulové. Takové řešení je zachyceno v následující tabulce; v horní části buněk jsou uvedeny náklady c_{ij}, vlevo dole přidělená množství x_{ij}.

	D_1	D_2	D_3	nabídka	u_i
S_1	6 2	8 10	10 3	15	$u_1 = 0$
S_2	7	11	11 17	17	$u_2 = 1$
S_3	4 18	5	12	18	$u_3 = -2$
poptávka	20	10	20	50	
v_j	$v_1 = 6$	$v_2 = 8$	$v_3 = 10$		$z = 381$

Bázické buňky jsou

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,1)\}.$$

Pro každou bázickou buňku platí vztah pro potenciály

$$u_i + v_j = c_{ij}, \qquad (i,j) \in B.$$

Dostáváme soustavu pěti rovnic

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 6, \\ u_1 + v_2 &= 8, \\ u_1 + v_3 &= 10, \\ u_2 + v_3 &= 11, \\ u_3 + v_1 &= 4. \end{aligned}$$

Protože potenciály jsou určeny pouze až na přičtení konstanty, můžeme si zafixovat $u_1 := 0$. Potom ze soustavy postupně dopočítáme

$$v_1 = 6, \quad v_2 = 8, \quad v_3 = 10, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -2,$$

což je právě zaneseno v tabulce výše.
Pro nebázické buňky spočítáme redukované náklady $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$:

$$\begin{aligned}
\Delta_{21} &= c_{21} - (u_2 + v_1) = 7 - (1 + 6) = 0, \\
\Delta_{22} &= c_{22} - (u_2 + v_2) = 11 - (1 + 8) = 2, \\
\Delta_{32} &= c_{32} - (u_3 + v_2) = 5 - ((-2) + 8) = -1, \\
\Delta_{33} &= c_{33} - (u_3 + v_3) = 12 - ((-2) + 10) = 4.
\end{aligned}$$

Jediná záporná odchylka je $\Delta_{32} = -1$, takže do báze se pokusíme zavést buňku $(3, 2)$.

Zlepšovací cyklus. V tabulce vyhledáme cyklus procházející buňkou $(3, 2)$, ve kterém se střídají již obsazené buňky v řádcích a sloupcích. Tento cyklus je

$$(3, 2)\ (+) \ \to \ (3, 1)\ (-) \ \to \ (1, 1)\ (+) \ \to \ (1, 2)\ (-) \ \to \ (3, 2),$$

kde v závorce je vždy znaménko, kterým je buňka označena. Označme $\theta > 0$ množství, o které zvýšíme příděl v buňce $(3, 2)$. Potom musíme o θ snížit příděly v buňkách se znaménkem $-$ a o θ je zvýšit v buňkách se znaménkem $+$. Rozpis přídělů v závislosti na θ je v následující tabulce.

	D_1	D_2	D_3	nabídka	u_i
S_1	6 $2 + \theta$	8 $10 - \theta$	10 3	15	$u_1 = 0$
S_2	7	11	11 17	17	$u_2 = 1$
S_3	4 $18 - \theta$	5 θ	12	18	$u_3 = -2$
poptávka	20	10	20	50	
v_j	$v_1 = 6$	$v_2 = 8$	$v_3 = 10$		$z = 381 - \theta$

Aby byly všechny příděly nezáporné, musí platit

$$10 - \theta \geq 0, \qquad 18 - \theta \geq 0,$$

tj. $\theta \leq 10$. Protože $\Delta_{32} = -1 < 0$, zvolíme největší možnou hodnotu, tedy $\theta^* = 10$, čímž dosáhneme největšího poklesu účelové funkce. Po dosazení $\theta = 10$ dostáváme nový bázický plán

	D_1	D_2	D_3	nabídka	u_i
S_1	6 12	8	10 3	15	$u_1 = 0$
S_2	7	11	11 17	17	$u_2 = 1$
S_3	4 8	5 10	12	18	$u_3 = -2$
poptávka	20	10	20	50	
v_j	$v_1 = 6$	$v_2 = 7$	$v_3 = 10$		$z = 371$

Z nových bázických buněk

$$B' = \{(1,1), (1,3), (2,3), (3,1), (3,2)\}$$

opět dopočítáme potenciály. Soustava rovnic pro u_i, v_j je nyní

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 6, \\ u_1 + v_3 &= 10, \\ u_2 + v_3 &= 11, \\ u_3 + v_1 &= 4, \\ u_3 + v_2 &= 5. \end{aligned}$$

Po položení $u_1 := 0$ dostaneme

$$v_1 = 6, \quad v_3 = 10, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -2, \quad v_2 = 7,$$

což je opět vyznačeno v tabulce. Redukované náklady pro nebázické buňky jsou

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= c_{12} - (u_1 + v_2) = 8 - (0 + 7) = 1, \\ \Delta_{21} &= c_{21} - (u_2 + v_1) = 7 - (1 + 6) = 0, \\ \Delta_{22} &= c_{22} - (u_2 + v_2) = 11 - (1 + 7) = 3, \\ \Delta_{33} &= c_{33} - (u_3 + v_3) = 12 - ((-2) + 10) = 4. \end{aligned}$$

Všechny odchylky jsou nezáporné, takže nalezený bázický plán je optimální. Zároveň však $\Delta_{21} = 0$, tedy existuje alespoň jedno další optimální bázické řešení.

Alternativní optimální řešení. Zkusme proto zavést do báze buňku $(2,1)$ a zkonstruovat nový cyklus

$$(2,1)\ (+)\ \to\ (2,3)\ (-)\ \to\ (1,3)\ (+)\ \to\ (1,1)\ (-)\ \to\ (2,1).$$

Označíme-li opět změnu po cyklu symbolem θ, pak příděly mají tvar

$$x_{11} = 12 - \theta, \quad x_{13} = 3 + \theta, \quad x_{21} = \theta, \quad x_{23} = 17 - \theta,$$

ostatní bázické buňky $(3, 1)$ a $(3, 2)$ zůstávají beze změny. Tomu odpovídá tabulka

	D_1	D_2	D_3	nabídka	u_i
S_1	6 $12 - \theta$	8	10 $3 + \theta$	15	$u_1 = 0$
S_2	7 θ	11	11 $17 - \theta$	17	$u_2 = 1$
S_3	4 8	5 10	12	18	$u_3 = -2$
poptávka	20	10	20	50	
v_j	$v_1 = 6$	$v_2 = 7$	$v_3 = 10$		$z = 371$

Z podmínek nezápornosti přídělů plyne

$$12 - \theta \geq 0, \qquad 17 - \theta \geq 0,$$

tedy $0 \leq \theta \leq 12$. Protože $\Delta_{21} = 0$, je hodnota účelové funkce $z = 371$ pro všechna θ v tomto intervalu stejná. Například pro $\theta = 12$ dostaneme alternativní optimální plán

$$x_{11} = 0, \quad x_{13} = 15, \quad x_{21} = 12, \quad x_{23} = 5, \quad x_{31} = 8, \quad x_{32} = 10,$$

který splňuje všechna omezení a má stejné minimální náklady jako předchozí řešení.

4.4 Shrnutí metody MODI

Metodu MODI můžeme shrnout v následujícím přehledu:

Metoda MODI – přehled kroků

1. Najdi nějaké bázické přípustné řešení (např. metodou severozápadního rohu, metodou nejmenších nákladů apod.).
2. Spočítej potenciály u_i, v_j tak, aby pro všechny bázické buňky (i, j) platilo $u_i + v_j = c_{ij}$ (po zafixování jednoho potenciálu, např. $u_1 = 0$).
3. Pro každou buňku spočítej redukované náklady $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$.
4. Pokud $\Delta_{ij} \geq 0$ pro všechna (i, j), je aktuální bázické řešení optimální a algoritmus končí.
5. Jinak vyber buňku (p, q) s $\Delta_{pq} < 0$ (typicky s nejmenší hodnotou), sestroj příslušný cyklus v tabulce a proveď zlepšovací krok popisovaný výše. Tím získáš nové bázické přípustné řešení.
6. Vrať se na krok 2.

Metoda MODI je v praxi velmi oblíbená: využívá speciální strukturu dopravního problému, je relativně snadno implementovatelná a pro úlohy s několika desítkami až stovkami řádků a sloupců bývá velmi efektivní. Z teoretického hlediska však nejde o zásadně nový algoritmus – lze ji chápat jako specializovanou variantu simplexové metody, která pracuje přímo s tabulkou přídělů a s potenciály odpovídajícími duálním proměnným.