KAPITOLA 8

DUALITA LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ II

V této kapitole nejdříve dokážeme silnou větu o dualitě – nejdříve s pomocí vlastností simplexových tabulek, dále pak s použitím Farkasova lemmatu. Dále rozebereme význam a interpretaci duálnich proměnných. Na závěr krátce představíme rozšíření simplexové metody, tzv. duálně-simplexovou metodu.

1 Důkaz věty o silné dualitě

V této sekci provedeme důkaz této části věty o silné dualitě přímo ze simplexové tabulky odpovídající optimální bázi, tj. ze závěrečné tabulky z posloupnosti tabulek generovaných simplexovou metodou.

Tento důkaz tak přímo spoléhá na správnost a konečnost simplexové metody. Podrobně jsme sice popsali princip fungování metody, dokonce jsme okomentovali i způsoby, jak se vyhnout jejímu zacyklení, formální důkaz jsme však neprovedli. Tato sekci je tedy věnována čtenářům, kteří správnosti simplexové metody uvěřili. Čtenáře podezřívavější pak odkážeme na doprovodnou literaturu, kde lze onen chybějící důkaz najít, či na následující sekci, kde důkaz silné duality odvodíme z jiného, doufejme více uspokojivého, směru.

Připomeňme, že vycházíme z maximalizační úlohy ve standardním nerovnicovém tvaru

$$\text{(P)}: \quad \max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \quad \text{při} \quad A\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \ge 0.$$

Po doplnění pomocných proměnných získáme rovnicový tvar

$$\tilde{A}\,\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}, \qquad \tilde{\mathbf{x}} \ge 0, \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Předpokládejme, že (P) je přípustná a omezená. Simplexová metoda s anticyklickým pravidlem (viz Kapitola 6 Sekce 2.2) použitá na takovou úlohu skončí v nějakém optimálním bázickém přípustném bodě. Označme $B \subset \{1, \ldots, n+m\}$ příslušnou bázi a N její doplněk. Závěrečná tabulka má tvar (viz Lemma 4.5)

$$\tilde{\mathbf{x}}_B = \tilde{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \tilde{A}_B^{-1}\tilde{A}_N\,\tilde{\mathbf{x}}_N, \qquad z = z_0 + \tilde{\mathbf{r}}^\mathsf{T}\tilde{\mathbf{x}}_N,$$

kde

$$z_0 = \tilde{\mathbf{c}}_B^\mathsf{T}\tilde{A}_B^{-1}\mathbf{b}, \qquad \tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{c}}_N - \left(\tilde{\mathbf{c}}_B^\mathsf{T}\tilde{A}_B^{-1}\tilde{A}_N\right)^\mathsf{T} \ \le\ \mathbf{0}.$$

Optimální BFS označíme

$$\tilde{\mathbf{x}}^\star = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B^\star \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

s

$$\tilde{\mathbf{x}}_B^\star = \tilde{A}_B^{-1}\mathbf{b} \quad \text{a} \quad z^\star = z_0.$$

Tvrzení, které se snažíme dokázat, bude ihned triviálně plynout z následujícího lemmatu.

Lemma 8.1: Duální kandidát ze závěrečné tabulky

Definujme

$$\mathbf{y}^\star \ = \ \left(\tilde{\mathbf{c}}_B^\mathsf{T}\tilde{A}_B^{-1}\right)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^m.$$

Pak $\mathbf{y}^\star$ je přípustné řešení duální úlohy (D) a platí rovnost

$$\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^\star \ = \ \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}^\star.$$

Důkaz lemma.

Rovnost hodnot účelových funkcí je okamžitá (opět využíváme Lemma 4.5):

$$\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^\star = \tilde{\mathbf{c}}^\mathsf{T}\tilde{\mathbf{x}}^\star = \tilde{\mathbf{c}}_B^\mathsf{T}\tilde{\mathbf{x}}_B^\star = \tilde{\mathbf{c}}_B^\mathsf{T}\tilde{A}_B^{-1}\mathbf{b} = \left(\tilde{\mathbf{c}}_B^\mathsf{T}\tilde{A}_B^{-1}\right)\mathbf{b} = (\mathbf{y}^\star)^\mathsf{T}\mathbf{b} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}^\star.$$

Zbývá ověřit přípustnost $\mathbf{y}^\star$ pro (D), tj. $A^\mathsf{T}\mathbf{y}^\star \geq \mathbf{c}$ a $\mathbf{y}^\star \geq 0$. Podmínka nezápornosti vektoru se dá ekvivalentně zapsat jako $I_m\mathbf{y}^\star \geq 0$ a obě podmínky tedy lze sloučit do jediné

$$\tilde{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}^\star \;\geq\; \tilde{\mathbf{c}}. \tag{8.1}$$

Označme $\mathbf{w} := \tilde{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}^\star = \left(\tilde{\mathbf{c}}_B^\mathsf{T}\tilde{A}_B^{-1}\tilde{A}\right)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+m}$. Pro složky odpovídající bázi B dostáváme

$$\mathbf{w}_B = \left(\tilde{\mathbf{c}}_B^\mathsf{T}\tilde{A}_B^{-1}\tilde{A}_B\right)^\mathsf{T} = \left(\tilde{\mathbf{c}}_B^\mathsf{T}I_m\right)^\mathsf{T} = \tilde{\mathbf{c}}_B,$$

a pro nebázické složky

$$\mathbf{w}_N = \left(\tilde{\mathbf{c}}_B^\mathsf{T}\tilde{A}_B^{-1}\tilde{A}_N\right)^\mathsf{T} = \tilde{\mathbf{c}}_N - \tilde{\mathbf{r}} \;\geq\; \tilde{\mathbf{c}}_N,$$

protože $\tilde{\mathbf{r}} \leq \mathbf{0}$ v optimální tabulce. Tím je (8.1) splněna. Z tvaru $\tilde{A} = (A\ I_m)$ navíc prvních n složek nerovnosti (8.1) přesně vyjadřují $A^\mathsf{T}\mathbf{y}^\star \geq \mathbf{c}$ a posledních m složek dává $\mathbf{y}^\star \geq 0$. ■

Důkaz věty.

Nechť (P) je přípustná a omezená. Víme, že v rámci simplexové metody existuje optimální báze B a závěrečná tabulka s $\tilde{\mathbf{r}} \leq 0$. Lemma 8.1 poskytuje vektor $\mathbf{y}^\star$ přípustný pro (D) a platí $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^\star = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}^\star$. Slabá dualita (Věta 7.3) říká

$$\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \;\leq\; \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} \quad \text{pro všechna přípustná } (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Proto $\mathbf{x}^\star$ i $\mathbf{y}^\star$ musí být optimální. Spolu s doplňkovými případy danými slabou dualitou to dokazuje Větu 7.5. ■

2 Důkaz věty o dualitě z Farkasova lemmatu

Jiný důkaz silné duality LP vede přes tzv. Farkasovo lemma. Nejprve uvedeme jeho algebraickou a geometrickou formulaci a praktickou variantu pro soustavy nerovnic. Poté ukážeme, jak z této formy lemmatu plyne věta o dualitě.

2.1 Farkasovo lemma algebraicky

Lemma 8.2: Farkasovo lemma (algebraická verze)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Pak nastane právě jedna z následujících možností:

(F1) Soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má nezáporné řešení $\mathbf{x} \geq 0$.

(F2) Existuje vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ takový, že $\mathbf{y}^\mathsf{T}A \geq \mathbf{0}^\mathsf{T}$ a současně $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} < 0$.

Poznámka 8.3: Proč nemohou nastat současně (F1) a (F2)

Jestliže $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má nezáporné řešení $\mathbf{x} \geq 0$, pak pro libovolné $\mathbf{y}$ s $\mathbf{y}^\mathsf{T} A \geq 0^\mathsf{T}$ platí $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \mathbf{y}^\mathsf{T} A\mathbf{x} \geq 0$, tudíž $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} < 0$ nemůže nastat. Naopak, pokud (F1) selže, dokáže (F2) neexistenci nezáporného řešení certifikovat.

2.2 Farkasovo lemma geometricky

Pro geometrickou formulaci Farkasova lemmatu musíme nejdříve zavést konvexní kužel.

Definice 8.4: Konvexní kužel

Nechť $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$. *Konvexní kužel* generovaný vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ je množina všech jejich nezáporných lineárních kombinací, tj.

$$C \;=\; \left\{\, t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_n\mathbf{a}_n \;\middle|\; t_1, \ldots, t_n \geq 0 \,\right\}.$$

Konvexní kužel generovaný vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ budeme značit jako

$$\operatorname{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}.$$

Farkasovo lemma lze pak přepsat následujícím způsobem:

Lemma 8.5: Farkasovo lemma (geometrická verze)

Pro $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ nastane právě jedna z možností:

(F1′) $\mathbf{b} \in C = \operatorname{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$.

(F2′) Existuje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ a nadrovina $h = \{\mathbf{x} \,|\, \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 0\}$ taková, že $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{a}_i \geq 0$ pro všechna i (tj. celý kužel C leží na jedné straně h) a současně $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} < 0$ (bod $\mathbf{b}$ leží na opačné straně).

Poznámka 8.6: Ekvivalence obou verzí

Vezmeme-li $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$, tvrzení (F1) říká $\mathbf{b} = \sum_i t_i\mathbf{a}_i$ s $t_i \geq 0$, tedy $\mathbf{b} \in C$. Naopak, (F2) i (F2′) vyjadřují oddělení bodu $\mathbf{b}$ od kužele C podpůrnou nadrovinou procházející počátkem.

2.3 Důkaz silné duality pomocí Farkasova lemmatu

Pro přímé použití v dualitě budeme potřebovat verzi Farkasova lemmatu s „$\leq$“.

Lemma 8.7: Farkasovo lemma (varianta pro $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$)

Soustava nerovnic $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ má nezáporné řešení $\mathbf{x} \geq 0$ právě tehdy, když pro každý nezáporný vektor $\mathbf{y} \geq 0$ s $\mathbf{y}^\mathsf{T} A \geq \mathbf{0}^\mathsf{T}$ nutně platí také $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} \geq 0$.

Důkaz lemma.

Matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ rozšíříme o pravou stranu s identitou a dostaneme

$$\bar{A} = (A \mid I_m).$$

Hledáme nezáporné

$$\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix} \geq 0$$

tak, aby

$$\bar{A}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

To je ekvivalentní systému $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$. Použití Lemmatu 8.2 na rovnost $\bar{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ dá přesně uvedenou podmínku. ■

Nyní se přesuneme k dokázání části (iv) Věty 7.5.

Důkaz věty.

Krok 1: příprava. Nechť $\mathbf{x}^\star$ je optimální řešení (P) a označme

$$\gamma \;:=\; \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^\star.$$

Systém

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \qquad \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \;\geq\; \gamma \tag{8.2}$$

má nezáporné řešení (konkrétně $\mathbf{x}^\star$). Naopak pro libovolné $\varepsilon > 0$ je

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \qquad \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \;\geq\; \gamma + \varepsilon \tag{8.3}$$

neřešitelný v nezáporných proměnných, neboť by porušoval optimálnost γ.

Zapišme (8.3) kompaktně pomocí „rozšířeného“ systému. Definujme matici a vektor

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A\\ -\mathbf{c}^\mathsf{T}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times n}, \qquad \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix}\mathbf{b}\\ -\gamma-\varepsilon\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

Pak (8.3) je ekvivalentní $\hat{A}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{b}}$, $\mathbf{x} \geq 0$.

Krok 2: aplikace lemmatu. Protože pro $\varepsilon > 0$ je systém $\hat{A}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{b}}$ neřešitelný v nezáporných proměnných, Lemma 8.7 dává existenci nezáporného $\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{u}, z) \in \mathbb{R}^{m+1}$ takového, že

$$\hat{\mathbf{y}}^\mathsf{T}\hat{A} \;\geq\; \mathbf{0}^\mathsf{T}, \qquad \hat{\mathbf{y}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{b}} \;<\; 0, \tag{8.4}$$

Z (8.4) dostáváme po dosazení

$$\hat{\mathbf{y}}^\mathsf{T}\hat{A} = (\mathbf{u}^\mathsf{T}, z)\begin{pmatrix} A\\ -\mathbf{c}^\mathsf{T}\end{pmatrix} = \mathbf{u}^\mathsf{T}A - z\,\mathbf{c}^\mathsf{T}, \qquad \hat{\mathbf{y}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{u}^\mathsf{T}, z)\begin{pmatrix}\mathbf{b}\\ -(\gamma+\varepsilon)\end{pmatrix} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{u} - z(\gamma+\varepsilon),$$

tj. po doplnění nerovností

$$A^\mathsf{T}\mathbf{u} \;\geq\; z\,\mathbf{c}, \qquad \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{u} \;<\; z\,(\gamma+\varepsilon), \qquad \mathbf{u} \geq 0,\; z \geq 0. \tag{8.5}$$

Krok 3: případ $\varepsilon = 0$ a nenulovost z. Pro $\varepsilon = 0$ má systém (8.2) nezáporné řešení ($\mathbf{x}^\star$), takže $\hat{A}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{b}}$ *je* řešitelný. Lemma 8.7 tedy v tomto případě vylučuje existenci $\hat{\mathbf{y}} \geq 0$ se striktní $\hat{\mathbf{y}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{b}} < 0$, a tudíž pro právě sestrojené $\hat{\mathbf{y}}$ musí platit

$$\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{u} \;\geq\; z\,\gamma. \tag{8.6}$$

Z (8.5) a (8.6) plyne, že $z > 0$ (jinak by pro $z = 0$ bylo $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{u} \geq 0$, což by kolidovalo s $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{u} < 0$ pro $\varepsilon > 0$).

Krok 4: normalizace a vznik duálního kandidáta. Položme $\mathbf{v} := \mathbf{u}/z \geq 0$. Z (8.5) dostáváme

$$A^\mathsf{T}\mathbf{v} \;\geq\; \mathbf{c}, \qquad \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{v} \;<\; \gamma + \varepsilon,$$

a z (8.6) navíc $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{v} \geq \gamma$. Vektor $\mathbf{v}$ je tedy přípustný pro (D) a jeho hodnota účelové funkce leží v intervalu

$$\gamma \;\leq\; \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{v} \;<\; \gamma + \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, existuje posloupnost přípustných duálních řešení s hodnotami konvergujícími k γ.

Protože pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje přípustné duální řešení s hodnotou v $[\gamma, \gamma + \varepsilon)$, dostáváme $\inf(\mathrm{D}) = \gamma$. Jelikož je v tomto případě úlohy LP konečné optimální hodnotě nabýváno (rozmyslete, plyne z vlastností mnohostěnu a účelové funkce), platí i

$$\min_{\text{příp. } \mathbf{y}} \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} \;=\; \gamma.$$

Závěr. Slabá dualita (Věta 7.3) dává vždy $\max(\mathrm{P}) \leq \min(\mathrm{D})$. Z konstrukce výše máme $\min(\mathrm{D}) \leq \gamma = \max(\mathrm{P})$. Dohromady

$$\max(\mathrm{P}) \;=\; \min(\mathrm{D}),$$

což je přesně tvrzení silné duality.

■

3 Důkaz Farkasova lemmatu

V předchozí sekci jsme důkaz opřeli o Farkasovo lemma, jehož důkaz si ukážeme nyní. Pro jeho pochopení je potřeba zavést pojem tzv. oddělitelnosti množin a dále uvést větu, díky které lze rozhodovat o oddělitelnosti konvexních množin.

Definice 8.8: Oddělitelnost množin

Řekneme, že neprázdné množiny $M, N \subset \mathbb{R}^n$ jsou *oddělitelné*, pokud existují $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ tak, že

$$\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \;\leq\; \alpha \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in N, \qquad \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \;\geq\; \alpha \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in M.$$

Definice 8.9: Oddělovací nadrovina

Nechť $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ a N je nadrovina. Řekneme, že N *odděluje* množiny X a Y, pokud X a Y leží v uzávěrech jednoho a druhého poloprostoru určeného N, tj. existují $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tak, že

$$N \;=\; \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \; \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \alpha\}, \qquad X \subseteq \{\mathbf{x} : \; \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq \alpha\}, \quad Y \subseteq \{\mathbf{x} : \; \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \alpha\}$$

nebo obráceně. Nadrovinu N nazýváme *oddělovací*. Pokud navíc X i Y leží ve vnitřku uvedených poloprostorů, říkáme, že N *striktně odděluje* X a Y.

Věta 8.10: O striktní oddělitelnosti konvexních množin

Nechť $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ jsou neprázdné disjunktní uzavřené konvexní množiny, z nichž alespoň jedna je kompaktní. Pak existují $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $\mathbf{x} \in X$ a každé $\mathbf{y} \in Y$ platí

$$\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \;>\; \alpha \;>\; \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{y}.$$

Tuto větu ponecháme bez důkazu, jelikož je nad rámec našeho kurzu. Nyní již dokážeme samotné Farkasovo lemma, respektive jednu z jeho ekvivalentních variant.

Lemma 8.11: Farkasovo lemma (ekvivalentní varianta)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Potom právě jedna z následujících soustav má řešení:

1. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$,
2. $A^\mathsf{T}\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ a $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} < 0$.

Důkaz lemma.

Krok 1. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ nemá řešení.

i) Označme sloupce matice A jako

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n), \qquad \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m \text{ pro } j = 1, \ldots, n.$$

Uvažujme konečně generovaný kužel

$$C = \operatorname{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}.$$

Ten je konvexní a uzavřený a z předpokladu je zřejmé, že $\mathbf{b} \notin C$, protože

$$C = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq 0\}.$$

ii) Máme tedy dvě disjunktní, uzavřené a konvexní množiny $\{\mathbf{b}\}$ a C, přičemž $\{\mathbf{b}\}$ je kompaktní. Podle Věty 8.10 existují $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} \;<\; \alpha \;<\; \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{z} \qquad \text{pro všechna } \mathbf{z} \in C. \tag{8.7}$$

iii) Protože $\mathbf{0} \in C$, dosadíme $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ do (8.7) a dostáváme

$$\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} \;<\; \alpha \;<\; 0,$$

tedy nutně $\alpha \leq 0$ a z toho $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} < 0$.

iv) Zbývá ukázat $A^\mathsf{T}\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$. Kdyby existovalo $\mathbf{z} \in C$ takové, že $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{z} < 0$, pak pro každé $\beta \geq 0$ máme $\beta\mathbf{z} \in C$ a z (8.7) by vyplývalo

$$\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} \;<\; \alpha \;<\; \mathbf{y}^\mathsf{T}(\beta\mathbf{z}) = \beta\,\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{z} < 0.$$

Pro $\beta \to \infty$ jde pravá strana k $-\infty$, což není možné, neboť α i $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ jsou konečné. Tedy $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{z} \geq 0$ pro všechna $\mathbf{z} \in C$, a zejména pro jednotlivé generátory kužele $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Tím dostáváme

$$\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{a}_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad \text{tj.} \qquad A^\mathsf{T}\mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

Získali jsme tedy $\mathbf{y}$ takový, že

$$A^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \qquad \mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} < 0.$$

Krok 2. ($\Leftarrow$) Nechť existuje $\mathbf{y}$ s $A^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ a $\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} < 0$. Kdyby zároveň existovalo $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ takové, že $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, potom bychom dostali

$$\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \geq 0,$$

což odporuje předpokladu $\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} < 0$.

Tedy soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ nemá řešení.

■

4 Interpretace duálních proměnných

Duální proměnné jsou důležitým a zároveň intuitivním výstupem lineárního programování. Zatímco primární proměnné popisují konkrétní rozhodnutí (kolik vyrábět, jakým tokem vést materiál, které aktivity spustit), duální proměnné popisují hodnotu jednotlivých omezení – tedy zdrojů, kapacit nebo limitů, které náš model používá.

Základní myšlenka je velmi jednoduchá – duální proměnná $y_i^\star$ říká, o kolik by se změnilo optimum, kdybychom v i-tém omezení mírně zvýšili pravou stranu b_i.

Jinými slovy:

- pokud je zdroj „vzácný", jeho marginální hodnota je kladná $\Rightarrow y_i^\star > 0$,
- pokud má zdroj rezervu, jeho marginální hodnota je nulová $\Rightarrow y_i^\star = 0$.

Tato logika je propojena s tím, zda je omezení v optimu tzv. *aktivní* (tj. je nabýváno rovnosti v původní nerovnostní podmínce):

- Aktivní omezení je přesně „na hraně", brání zlepšení řešení a tím pádem má nenulovou cenu.
- Neaktivní omezení pouze stojí „někde v pozadí" a v daném optimu roli nehraje – proto má cenu nulovou.

Citlivost optima na změny pravých stran. Duální proměnné nám dávají rychlý odhad, jak se změní optimální hodnota při malé změně parametrů:

$$\Delta v \;\approx\; (\mathbf{y}^\star)^{\mathsf{T}}\Delta\mathbf{b}.$$

Je to tedy přímočarý lineární model chování optima v blízkosti aktuálního řešení. Tím dostáváme nejen ekonomickou interpretaci, ale i nástroj pro analýzu „co-kdyby" scénářů.

Praktické čtení výsledku. Duální proměnné jsou v simplexové tabulce přímo viditelné:

- V tvaru tabulek, které jsme používali např. na cvičeních, se duální proměnné skrývají v **předposledním řádku tabulky**, v části odpovídající bazickým sloupcům.

- Konkrétně:
$$\mathbf{y}^\star = (\mathbf{c}_B^\top A_B^{-1})^\top$$
odpovídá koeficientům u bazických proměnných v předposledním řádku.

- Z komplementárních podmínek $y_i^\star(b_i - a_i^\top x^\star) = 0$ plyne: neaktivní omezení $\Rightarrow y_i^\star = 0$ a naopak $y_i^\star > 0 \Rightarrow$ omezení je aktivní. Aktivita omezení sama o sobě ještě neimplikuje $y_i^\star > 0$ (možná degenerace).

Duální proměnné nám umožňují okamžitě říci:

- *které omezení skutečně limituje optimum* – pokud má některé omezení hodnotu $y_i^\star > 0$, znamená to, že právě ono „drží" řešení na místě. Každé další uvolnění tohoto omezení by vedlo ke zlepšení hodnoty účelové funkce, takže jde o skutečný kámen úrazu modelu. Omezení s $y_i^\star = 0$ naopak řešení neomezuje, jelikož má rezervu a jeho přidání či ubrání výslednou hodnotu v daném bodě nijak neovlivní.

- *jak „drahé" je toto omezení*, tj. o kolik by vzrostla optimální hodnota při navýšení jeho kapacity – numerická velikost $y_i^\star$ přímo říká, jakou hodnotu má jedna další jednotka pravé strany b_i. Pokud například $y_i^\star = 5$, znamená to, že přidáním jedné jednotky kapacity tohoto omezení očekáváme růst optima zhruba o 5 jednotek účelové funkce (pokud zůstane stejná báze).

- *kam má smysl investovat nebo rozšiřovat kapacity* – porovnáním velikostí $y_i^\star$ mezi jednotlivými omezeními vidíme, kde bude investice nejúčinnější. Omezení s největší hodnotou $y_i^\star$ poskytuje nejvyšší zisk za jednotku rozšíření, a tedy i největší potenciální přínos. V praxi tak duální proměnné fungují jako jednoduché pravidlo prioritizace investic.

- *které zdroje jsou nadbytečné* – všude tam, kde je $y_i^\star = 0$, má zdroj rezervu. Z pohledu současného optimálního řešení jej máme „více, než potřebujeme". Navýšení nebo mírné snížení pravé strany takového omezení nemá na hodnotu účelové funkce žádný okamžitý dopad. Tento signál lze využít například pro hledání neefektivně nastavených kapacit nebo pro jejich přesunutí jinam.

5 Duální simplexová metoda

Duální simplexová metoda představuje zrcadlový obraz klasické (prvotní) simplexové metody. Namísto toho, abychom začínali v *prvotně přípustném* bázickém bodě a udržovali duální přípustnost postupným odstraňováním kladných redukovaných nákladů, vycházíme z báze, která je *duálně přípustná* (tj. $\mathbf{r} \leq \mathbf{0}$), avšak nemusí být prvotně přípustná (některé složky $\mathbf{p}$ jsou záporné). Cílem je iterativně odstraňovat záporné složky v $\mathbf{p}$, aniž bychom porušili duální přípustnost, až je dosaženo obou podmínek současně — což znamená optimum.

Vycházíme z rovnicového tvaru úlohy a obecné simplexové tabulky definované dříve:

$$\boxed{\mathbf{x}_B = \mathbf{p} + Q\,\mathbf{x}_N, \qquad z = z_0 + \mathbf{r}^\top \mathbf{x}_N.}$$

5.1 Duální přípustnost a kritérium optimality

Pro simplexovou tabulku tvaru

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{p} + Q\,\mathbf{x}_N, \qquad z = z_0 + \mathbf{r}^\mathsf{T}\mathbf{x}_N,$$

platí:

(1) Prvotní přípustnost. Vektor $\mathbf{p} = A_B^{-1}\mathbf{b}$ obsahuje hodnoty bázických proměnných. Bázické řešení $\mathbf{x}_B = \mathbf{p}$ je tedy *prvotně přípustné*, právě když

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0},$$

protože všechny proměnné musí splňovat podmínku nezápornosti.

(2) Duální přípustnost. Pro maximalizační úlohu platí, že zvýší-li se některá nebázická proměnná $\mathbf{x}_N$, hodnota účelové funkce se změní o $\mathbf{r}^\mathsf{T}\mathbf{x}_N$. Aby žádná nebázická proměnná nemohla zlepšit hodnotu účelové funkce, musí být

$$\mathbf{r} \leq \mathbf{0}.$$

Tomu říkáme *duální přípustnost*. Geometricky odpovídá tomu, že přidáním žádné hrany polyedru nelze jít „nahoru“.

(3) Kritérium optimality. Při současném splnění obou podmínek

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{r} \leq \mathbf{0}$$

není možné:

- porušit žádné omezení nezápornosti (protože $\mathbf{p} \geq 0$),
- zlepšit hodnotu účelové funkce (protože všechna $r_j \leq 0$).

Takový bod je tedy bázickým přípustným řešením, ze kterého nelze provést žádný zlepšující pivot — jde o **optimální řešení**.

Poznámka 8.12: Srovnání s klasickou simplexovou metodou

Klasická metoda udržuje po celou dobu *prvotní přípustnost* ($\mathbf{p} \geq 0$) a postupně odstraňuje porušení *duální přípustnosti* ($\mathbf{r} \leq 0$). Duální simplex postupuje opačně: udržuje *duální přípustnost* ($\mathbf{r} \leq 0$) a odstraňuje porušení *prvotní přípustnosti* (záporné složky v $\mathbf{p}$). Obě metody konvergují k situaci, kdy jsou splněny obě podmínky zároveň — tj. k optimu.

5.2 Pivotový krok duální simplexové metody

V každé iteraci se nejprve volí *řádek* (vystupující proměnná), poté *sloupec* (vstupující proměnná).

Duální simplex — jeden krok algoritmu

1. **Výběr klíčového řádku (vystupující proměnná).** Pokud již $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$, jsme v optimu. Jinak vybereme index

$$s \in \arg\min_{i} \; p_i,$$

tedy řádek s nejzápornější složkou. Tento řádek musí opustit bázi.

2. **Výběr klíčového sloupce (vstupující proměnná).** V klíčovém řádku uvažujeme koeficienty q_{sj}:

   (a) Pokud $q_{sj} \geq 0$ pro všechna nebázická j, nelze obnovit $\mathbf{p} \geq 0$. **Úloha je nepřípustná.**

   (b) Jinak pro všechna j s $q_{sj} < 0$ spočteme poměry

   $$\theta_j = \frac{r_j}{q_{sj}}$$

   a volíme

   $$v \in \arg\min_{j:\, q_{sj}<0} \theta_j.$$

   Proměnná v sloupci v vstoupí do báze.

3. **Pivot.** Na prvku (s, v) provedeme Gaussovu eliminaci: normalizace klíčového prvku na 1 a vynulování ostatních prvků ve sloupci v (včetně řádku $\mathbf{r}$). Získáme novou bázi $B' = (B \setminus \{j_s\}) \cup \{v\}$.

4. **Opakuj.** Vraťte se ke kroku 1.

Poznámka 8.13: Zachování duální přípustnosti

Poměrový test $\theta_j = r_j/q_{sj}$ zajišťuje, že po pivotu zůstane $\mathbf{r} \leq 0$ a nově $r'_v = 0$. Duální simplex tedy nikdy neporuší duální přípustnost, stejně jako klasický simplex nikdy neporuší přípustnost prvotní.

Degenerace a cyklení

Při degeneraci se stejně jako u klasické simplexové metody může stát, že krok je nulový (nezmění se hodnota účelu ani základní řešení). Konečnost algoritmu zajišťují standardní anticyklická pravidla, jako je např. Blandovo pravidlo nebo lexikografické pivotování.

5.3 Výchozí duálně přípustná báze: metoda umělých omezení

Pokud výchozí tabulka nesplňuje $\mathbf{r} \leq 0$, můžeme postupovat duálním analogem „metody velkého M“, zde nazývaným *metoda umělých omezení*. Ta využívá jediné pomocné nerovnosti, která umožní přivést všechny r_j na nekladné hodnoty pivotováním.

Metoda umělých omezení — princip

1. Přidáme pomocné omezení tvaru
$$\sum_{j \in N} x_j \leq M$$
s doplňkovou proměnnou $s_{n+1} \geq 0$, která vstoupí do báze.
2. Vybereme nebázický sloupec s $r_j > 0$ a pivotujeme v pomocném řádku tak, aby x_j vstoupila do báze a její nový redukovaný náklad se stal nulovým.
3. Opakujeme krok 2, dokud nejsou všechny složky $\mathbf{r}$ nekladné.
4. Spustíme duální simplexovou metodu, která odstraní záporné složky v $\mathbf{p}$.
5. Po dosažení prvotní přípustnosti odstraníme pomocné omezení a posoudíme, zda řešení závisí na M (detekce neomezenosti nebo nadbytečnosti).