KAPITOLA 7

DUALITA LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

V této kapitole rozebereme dualitu lineárního programování, která nám umožní odhadovat a dokonce přesně určit optimum bez znalosti optimálního řešení primární úlohy. Nejdřív motivujeme dualitu na elementárním příkladu, poté přesně stanovíme tvar duálu a formulujeme slabou i silnou větu o dualitě.

1 Motivace a konstrukce duálu

Lineární programy mají jednu důležitou a možná trochu překvapivou vlastnost – každou úlohu můžeme číst dvěma způsoby. Jaké způsoby máme na mysli?

První způsob čtení je ten, který už známe – hledáme například nejlepší výrobní plán, tok, rozvrh nebo cokoliv obdobného tak, aby byla optimalizována hodnota nějakého námi určeného cíle. Druhý způsob čtení staví na jiném obrazu téže situace – například v případě otázky nákladů se ptáme, jaké ceny zdrojů by musely platit, aby žádný přípustný plán výroby nemohl dosáhnout vyšší hodnoty, než dovolují zdroje samotné.

Dále v textu obě optiky definujeme podrobně, již nyní ale uvedeme užívané názvosloví – prvnímu způsobu formulace úlohy lineárního programování se říká *primární*, druhému způsobu pak *duální*.

Oba přístupy jsou ze své podstaty ekvivalentní, nicméně uvidíme, že duální formulace nám poskytuje důležité vlastnosti, díky kterým lze danou úlohu lineárního programování snadněji analyzovat.

Intuitivní cesta k duálu vychází z myšlenky skládat omezení z primární úlohy s nezápornými koeficienty tak, aby vznikla jediná nerovnost, která převýší účelovou funkci. Taková kombinace pak dává informaci o tom, že původní účelová funkce nemůže dosáhnout hodnoty nad daný limit. Tento princip nyní demonstrujeme na konkrétním příkladu.

Příklad 7.1: Motivační problém

Uvažujme maximalizační úlohu LP

$$\begin{aligned}
\textbf{maximalizovat} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\textbf{za podmínek} \quad & 4x_1 + 8x_2 \leq 12, \\
& 2x_1 + x_2 \leq 3, \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 4, \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Bez počítání optima okamžitě víme, že $2x_1+3x_2 \leq 4x_1+8x_2 \leq 12$. Ještě lepší horní mez dostaneme vhodnou *nezápornou* kombinací řádků, např.

$$2x_1 + 3x_2 \;\leq\; \tfrac{1}{3}(4x_1 + 8x_2) + \tfrac{1}{3}(2x_1 + x_2) \;\leq\; \tfrac{1}{3}(12) + \tfrac{1}{3}(3) \;=\; 5.$$

Takto vzniklá lineární kombinace omezení nám dává informaci o tom, že optimum nemůže překročit 5.

V tomto postupu lze dále pokračovat – chceme najít *nejlepší* (nejnižší) horní odhad na $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ mezi všemi nerovnostmi, které získáme nezápornými kombinacemi řádků systému. Zaveďme nezáporné váhy y_1, y_2, y_3 pro tři nerovnosti z úlohy. Nerovnosti zkombinujeme a dostaneme

$$(4y_1 + 2y_2 + 3y_3)x_1 + (8y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 \;\leq\; 12y_1 + 3y_2 + 4y_3.$$

Aby levá strana převyšovala účelovou funkci $2x_1 + 3x_2$ pro všechna $\mathbf{x} \geq 0$, musí platit

$$\begin{aligned}
4y_1 + 2y_2 + 3y_3 &\geq 2, \\
8y_1 + y_2 + 2y_3 &\geq 3,
\end{aligned} \qquad y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

Mezi všemi takovými $\mathbf{y}$ chceme minimalizovat pravou stranu, protože ta je naším horním odhadem. Dostáváme tedy *duální* úlohu:

$$\begin{aligned} \textbf{minimalizovat} \quad & 12y_1 + 3y_2 + 4y_3, \\ \textbf{za podmínek} \quad & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ \geq \ 2, \\ & 8y_1 + y_2 + 2y_3 \ \geq \ 3, \\ & y_1, y_2, y_3 \ \geq \ 0. \end{aligned}$$

Pro původní uvedený příklad je optimální hodnota $\frac{19}{4}$ v bodě $\mathbf{x}^\star = (\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$. Pro duální úlohu je hodnota účelové funkce v optiumu také rovna $\frac{19}{4}$ v bodě $\mathbf{y}^\star = (\frac{5}{16}, 0, \frac{1}{4})$. Rovnost optimálních hodnot není náhoda, nýbrž důsledek jedné z vět, kterou uvedeme dále.

Co se zde stalo obecně? Každé přípustné $\mathbf{y}$ vytváří validní horní mez na maximum. Kdykoli tedy $\mathbf{y}$ splňuje duální omezení, platí pro *všechna* přípustná $\mathbf{x}$ nerovnost

$$\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \ \leq \ \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}.$$

V dalším textu popíšeme obecný postup při duální formulaci úlohy a ukážeme tzv. věty o dualitě, které obecně patří k stěžejním výsledkům z teorie lineárního programování.

1.1 Obecná primárně–duální dvojice

Zformalizujeme to, co jsme nastínili v předchozím textu. Uvažujme nám již dobře známou obecnou maximalizační úlohu ve standardním nerovnicovém tvaru

$$\textbf{max}\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \quad \text{při} \quad A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \ \ \mathbf{x} \geq 0 \qquad (\mathbf{P}),$$

a tuto formulaci úlohy budeme nazývat *primární úloha*. K ní zavedeme *duální úlohu* ve tvaru

$$\textbf{min}\ \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} \quad \text{při} \quad A^\mathsf{T}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \ \ \mathbf{y} \geq 0 \qquad (\mathbf{D})$$

s přirozenou interpretací – každé $\mathbf{y} \geq 0$ dává horní odhad $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ na optimum z primární úlohy.
Nyní si ukážeme, jak lze takovou duální úlohu systematicky zkonstruovat i v obecnějších situacích, kdy se v primární úloze vyskytují různé typy omezení a proměnných.

Obecná konstrukce. Uvažujme primární úlohu s proměnnými $x_1, \ldots, x_n$ a omezeními

$$P_i: \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \begin{cases} \leq \\ \geq \\ = \end{cases} b_i, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

zde a_{ij} značí prvek matice A v i-tém řádku a j-tém sloupci. Každé omezení tedy může být nerovností různého směru nebo rovností. Cílem je maximalizovat $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$.

Duální úloha bude mít proměnné $y_1, \ldots, y_m$, z nichž každá odpovídá jednomu primárnímu omezení P_i. Směr příslušné nerovnosti v omezení určuje znaménkovou podmínku pro příslušnou duální proměnnou:

$$\begin{cases} y_i \geq 0, & \text{je-li v primární úloze } P_i :\leq, \\ y_i \leq 0, & \text{je-li v primární úloze } P_i :\geq, \\ y_i \in \mathbb{R}, & \text{je-li v primární úloze } P_i := . \end{cases}$$

Omezující podmínky v duální úloze Q_j odpovídají jednotlivým primárním proměnným x_j. Pro každé $j = 1, \ldots, n$ má podmínka tvar

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \begin{cases} \geq \\ \leq \\ = \end{cases} c_j,$$

kde směr nerovnosti je určen typem primární proměnné:

$$\begin{cases} x_j \geq 0 \;\Rightarrow\; Q_j :\geq, \\ x_j \leq 0 \;\Rightarrow\; Q_j :\leq, \\ x_j \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; Q_j := . \end{cases}$$

Účelová funkce duální úlohy má tvar

$$\mathbf{min}\ \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y},$$

a tedy je *minimalizační*. Všimněme si, že v první části konstrukce (přechod od primárních omezení k duálním proměnným) se směr nerovností obrací, zatímco v druhé části (od primárních proměnných k duálním omezením) se zachovává.

Recept na dualizaci

Nechť primární úloha má proměnné $x_1, \dots, x_n$ a omezení $P_1, \dots, P_m$. Duální úloha má proměnné $y_1, \dots, y_m$, kde y_i odpovídá i-tému omezení, a omezení $Q_1, \dots, Q_n$, kde Q_j odpovídá proměnné x_j. Platí:

Primární úloha	**Duální úloha**
proměnné $x_1, \dots, x_n$	proměnné $y_1, \dots, y_m$
matice A	matice A^T
pravá strana $\mathbf{b}$	pravá strana $\mathbf{c}$
účel. funkce max $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$	účel. funkce min $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$
$x_j \geq 0$	j-té duální omezení $\geq$
$x_j \leq 0$	j-té duální omezení $\leq$
$x_j \in \mathbb{R}$	j-té duální omezení $=$
i-té omezení $\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$	$y_i \geq 0$
i-té omezení $\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$	$y_i \leq 0$
i-té omezení $\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	$y_i \in \mathbb{R}$

Pravidla platí pro primární úlohu v maximalizačním tvaru. Pro minimalizační tvar můžeme změnou znaménka převést úlohu na maximalizační, nebo používat výše uvedená pravidla recipročně.

Lze si také všimnout, že pravidla fungují symetricky „tam“ i „zpátky“. Znamená to, že vyjdeme-li z nějaké úlohy lineárního programování, sestrojíme k ní úlohu duální a poté z této duální opět duální, dostaneme zpět původní (primární) úlohu. Úlohy (**P**) a (**D**) v naší formulaci jsou tedy *navzájem duální*. Jinými slovy, chceme-li dualizovat minimalizační úlohu, můžeme ji považovat za duální k nějaké maximalizační úloze a použít tentýž recept, pouze v opačném směru.

Poznámka 7.2: Lagrangeovská konstrukce duální úlohy

Dualitu lze chápat nejen pomocí nezáporných kombinací omezení, ale také jako *Lagrangeův duál* v obecném smyslu optimalizační teorie.
Uvažujme primární úlohu ve standardním tvaru

$$(\mathbf{P}): \quad \max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \quad \text{při} \quad A\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0.$$

Pro i-té nerovnostní omezení zavádíme *Lagrangeův multiplikátor* $y_i \geq 0$, který vyjadřuje, jak silně je dané omezení „aktivní“ v optimu.

Lagrangián. Definujeme funkci

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} + \mathbf{y}^\mathsf{T}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} + \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{c} - A^\mathsf{T}\mathbf{y}),$$

kde $\mathbf{y} \geq 0$. Pro fixní $\mathbf{y}$ představuje $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *Lagrangeovu relaxaci* úlohy – omezení $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ jsou přesunuta do účelové funkce s penalizací $\mathbf{y}^\mathsf{T}(A\mathbf{x} - \mathbf{b})$.

Lagrangeův duál. Protože v primární úloze maximalizujeme přes $\mathbf{x}$, zkoumáme pro každé $\mathbf{y} \geq 0$ hodnotu

$$g(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \geq 0} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \geq 0} \big[\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} + \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{c} - A^\mathsf{T}\mathbf{y})\big].$$

Pokud vektor $\mathbf{c} - A^\mathsf{T}\mathbf{y}$ má alespoň jednu kladnou složku, supremum je $+\infty$ (protože příslušná složka x_j může růst bez omezení). Aby byla hodnota konečná, musí platit

$$A^\mathsf{T}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}.$$

V takovém případě je maximum přes $\mathbf{x} \geq 0$ dosaženo v $\mathbf{x} = 0$ a máme $g(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$.

Duální úloha. Z definice $g(\mathbf{y})$ jako horní meze pro všechny přípustné $\mathbf{x}$ plyne, že každé $\mathbf{y} \geq 0$ splňující $A^\mathsf{T}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ poskytuje horní odhad na optimum primární úlohy. Hledáme tedy nejmenší takovou horní mez:

$$\textbf{(D)}: \quad \min_{\mathbf{y} \geq 0} \ \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} \quad \text{při} \quad A^\mathsf{T}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}.$$

Význam. Vidíme, že **duál LP** je přesně Lagrangeův duál primární úlohy. Tento pohled se přirozeně zobecňuje v nelineární konvexní optimalizaci.
Z praktického hlediska je tedy možné chápat proměnné $\mathbf{y}$ buď jako „váhy“ při skládání omezení, nebo jako *Lagrangeovy multiplikátory* spojené s omezeními $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$. Obě interpretace vedou ke stejnému duálu.

2 Slabá a silná věta o dualitě

V této sekci pracujeme s dříve zavedeným označením:

$$\textbf{(P)}: \quad \max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \quad \text{při} \quad A\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0, \qquad \textbf{(D)}: \quad \min\ \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} \quad \text{při} \quad A^\mathsf{T}\mathbf{y} \geq \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq 0.$$

Uvedeme dvě stěžejní věty z teorie duality, a to silnou a slabou větu o dualitě. Slabá věta formalizuje jednoduchou myšlenku – každé přípustné řešení duálu dává horní odhad na hodnotu účelové funkce v primární úloze. Silná věta pak říká, že pokud existuje optimum primární i duální úlohy, pak se tyto hodnoty rovnají. Důkaz silné věty v této kapitole nebudeme uvádět a vrátíme se k němu později.

2.1 Slabá dualita

Smysl duálu je *hlídat primární úlohu shora*: z nezáporných kombinací primárních omezení vznikají nerovnosti, které převyšují účelovou funkci. Slabá věta tuto konstrukci převádí na čistě maticový vztah mezi libovolnými přípustnými páry $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

Věta 7.3: Slabá věta o dualitě

Je-li $\mathbf{x}$ přípustné pro (P) a $\mathbf{y}$ přípustné pro (D), potom

$$\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \;\le\; \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}.$$

Speciálně: je-li (P) neomezená, (D) je nepřípustná; je-li (D) neomezená, (P) je nepřípustná.

Důkaz věty.

Speciální případy věty jsou pro svou jednoduchost přenechány čtenáři k doplnění – návod je také v následující poznámce. Důkaz netriviálního případu uděláme dvěma ekvivalentními způsoby.

Řetězec nerovností. Z $\mathbf{x} \ge 0$ a $A^\mathsf{T}\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$ plyne

$$\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \;\le\; (A^\mathsf{T}\mathbf{y})^\mathsf{T}\mathbf{x} \;=\; \mathbf{y}^\mathsf{T}A\mathbf{x}.$$

Z $\mathbf{y} \ge 0$ a $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$ dále

$$\mathbf{y}^\mathsf{T}A\mathbf{x} \;\le\; \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} \;=\; \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}.$$

Složením dostaneme $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \le \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$.

Mezera duality. Definujme mezeru $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} - \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$. Potom

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^\mathsf{T}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) + \mathbf{x}^\mathsf{T}(A^\mathsf{T}\mathbf{y} - \mathbf{c}).$$

Jelikož $\mathbf{b} - A\mathbf{x} \ge 0$, $\mathbf{y} \ge 0$, $A^\mathsf{T}\mathbf{y} - \mathbf{c} \ge 0$ a $\mathbf{x} \ge 0$, jsou oba sčítance nezáporné, tedy $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ge 0$. To je právě $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \le \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$. ∎

Poznámka 7.4: Přímé důsledky slabé duality

- Pokud mají (P) a (D) přípustná řešení, platí $\max\limits_{\text{příp. }\mathbf{x}} \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \le \min\limits_{\text{příp. }\mathbf{y}} \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$.
- Je-li (P) neomezená a (D) by byla přípustná, dostali bychom „$\infty \le \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$“, to by byl zjevný spor. Tedy (D) musí být nepřípustná. Analogicky pro druhý směr.
- Pro libovolný přípustný pár $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je mezera duality $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} - \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \ge 0$. V optimu je tato mezera dualirt nulová (viz silná dualita níže).

2.2 Silná dualita

Silná dualita říká, jak již název napovídá, o optimální hodnotě úlohy LP něco víc. Díky ní můžeme říci, že má-li jedna z úloh (ať už primární, nebo duální) optimální řešení s konečnou hodnotou, pak je má i druhá a hodnoty jsou stejné. Formálně můžeme toto tvrzení shrnout do následující věty:

Věta 7.5: Věta o dualitě lineárního programování (silná věta o dualitě)

Pro dvojici úloh

$$\textbf{(P)}: \quad \max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \quad \text{při}\ \ A\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge 0, \qquad \textbf{(D)}: \quad \min\ \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} \quad \text{při}\ \ A^\mathsf{T}\mathbf{y} \ge \mathbf{c},\ \mathbf{y} \ge 0.$$

nastane právě jedna z možností:

1. Ani (P), ani (D) nemá přípustné řešení.
2. (P) je neomezená a (D) nemá přípustné řešení.
3. (P) nemá přípustné řešení a (D) je neomezená.
4. Jak (P), tak (D) mají přípustné řešení. Pak existuje optimální řešení $\mathbf{x}^\star$ úlohy (P) a optimální řešení $\mathbf{y}^\star$ úlohy (D) a platí
$$\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^\star \ = \ \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}^\star.$$