KAPITOLA 6

DEGENERACE, PIVOTOVACÍ PRAVIDLA A EFEKTIVITA

Tato kapitola navazuje na předchozí výklad o rovnicovém tvaru, bázických přípustných řešeních a simplexových tabulkách. Nejprve vysvětlíme, co znamená *degenerace* v kontextu simplexové metody a jak se projevuje v tabulce. Dále shrneme pravidla pro volbu vstupující proměnné, včetně pravidel zaručujících konečnost algoritmu. Závěrem stručně okomentujeme efektivitu metody – proč může mít teoreticky exponenciální složitost, ale v praxi bývá velmi rychlá.

1 Degenerace v simplexové metodě

V předchozích kapitolách jsme viděli, že simplexová metoda přechází mezi bázickými přípustnými řešeními, přičemž v každém kroku se hodnota účelové funkce zlepšuje. Tento postup však může narazit na zvláštní situaci, kdy se báze sice změní, ale hodnota účelové funkce zůstane stejná. Takové případy označujeme jako *degenerované*.

1.1 Jak se degenerace projevuje

V simplexové tabulce se degenerace projeví tím, že při volbě vstupující proměnné existuje sice zlepšující směr (některé $r_j > 0$), ale poměrový test (4.2) dá minimální poměr rovný nule. V takovém případě provádíme pivot, ale hodnota účelové funkce z se nezmění – mluvíme o *nulovém pivotu* nebo *nulovém kroku*.

Poznámka 6.1: Nulový krok není chyba

Takové kroky jsou běžné a nejsou chybou výpočtu. Prosté provedení pivotu s nulovým krokem však může způsobit opakování tabulek, pokud se pravidla volby proměnných nedefinují jednoznačně.

Tato situace může nastat opakovaně. Přestože se báze mění, výpočet se geometricky „točí“ kolem jednoho vrcholu. Pokud by se při takových nulových krocích báze opakovala, mluvili bychom o *cyklení*. Tomu se budeme věnovat v následující části.

Poznámka 6.2: Cyklení a konečnost postupu

Pokud výpočet simplexovou metodou neskončí, musí nutně dojít k cyklení. Důvod je jednoduchý: počet různých bází, které mohou při výpočtu nastat, je konečný — konkrétně nejvýše $\binom{n}{m}$, což odpovídá všem možným výběrům bází z n proměnných po m. Aby tedy metoda pokračovala nekonečně dlouho, musela by se dříve či později vrátit ke stejné tabulce. Právě proto je nutné zavádět anticyklická pravidla, o nichž pojednáme v další části.

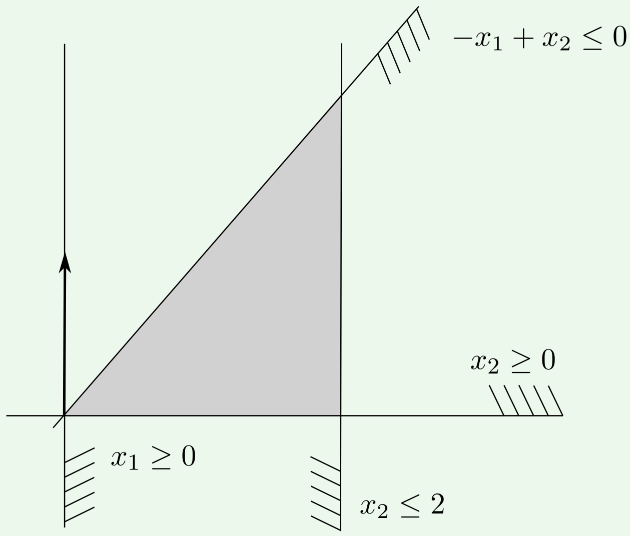
1.2 Příklad degenerované úlohy

Příklad 6.3: Degenerovaná úloha a nulový krok

Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} \textbf{maximalizovat} \quad & x_2, \\ \textbf{za podmínek} \quad & -x_1 + x_2 \le 0, \\ & x_1 \le 2, \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Přípustná oblast této úlohy je znázorněna na obrázku. Z pohledu geometrie se optimum nachází v bodě, kde se protínají všechny aktivní nadroviny, což zde vede k degeneraci – v optimálním bodě je jedna z bázických proměnných nulová.



Po doplnění pomocných proměnných x_3, x_4 získáme rovnicový tvar

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 + x_4 = 2, \qquad x_i \geq 0,$$

a účelovou funkci

$$z = x_2.$$

Odpovídající počáteční simplexová tabulka má tvar

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 - x_2, \\ x_4 &= 2 - x_1, \\ z &= x_2. \end{aligned}$$

Tato tabulka odpovídá bázickému přípustnému řešení

$$\mathbf{x} = (0, 0, 0, 2), \qquad z = 0,$$

kde bázi tvoří proměnné $\{x_3, x_4\}$.
Jedinou proměnnou, která by mohla vstoupit do báze, je x_2, protože v řádku účelové funkce má kladný koeficient. První rovnice však dává podmínku $x_3 = x_1 - x_2 \geq 0$, a při $x_1 = 0$ tedy $x_2 \leq 0$. Zvětšení x_2 není možné, aniž by se x_3 stalo záporným, a tedy nelze hodnotu účelové funkce zlepšit.
Přestože jsme ještě nedosáhli optima, žádné další zlepšení už tabulka pro danou proměnnou neumožňuje. Provedeme tedy *pivot s nulovým postupem* – výměnou x_2 do báze (a x_3 z báze) získáme novou tabulku

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - x_3, \\ x_4 &= 2 - x_1, \\ z &= x_1 - x_3. \end{aligned}$$

Hodnota účelové funkce zůstává $z = 0$, ale báze se změnila. Tato situace představuje typický *degenerovaný pivotový krok*: báze se mění, přestože geometricky odpovídá stále stejnému bodu.

2 Pivotovací pravidla a zacyklení

Viděli jsme, že degenerace může vést k nulovým pivotům a, jak bylo předesláno, v krajním případě i k cyklení. Aby simplexová metoda byla prakticky použitelná, je nutné přesně určit, jakým způsobem se vybírají proměnné vstupující a vystupující z báze. Soubor těchto pravidel označujeme jako *pivotovací pravidla.*

V předchozích kapitolách jsme blíže popsali pravidlo určující vystupující proměnnou. V této části se nejprve zaměříme na volbu *vstupující proměnné*, která určuje směr zlepšení, a následně na *anticyklická pravidla*, která zaručí, že výpočet vždy skončí po konečném počtu kroků.

2.1 Pravidla pro volbu vstupující proměnné

Uvažujme značení zavedené dříve pro obecnou simplexovou tabulku. Pokud v tabulce existuje více nebázických proměnných x_j s kladnou hodnou $r_j > 0$, je třeba určit, která z nich vstoupí do báze. Volba vstupující proměnné výrazně ovlivňuje rychlost konvergence i počet pivotů. Níže uvádíme několik nejběžnějších pravidel.

1. Náhodné pravidlo. Nejjednodušší myšlenka je vybrat sloupec náhodně. Takový výběr sice zachová korektnost metody, ale obecně vede k většímu počtu iterací.

2. Dantzigovo pravidlo. Nejčastěji používaným pravidlem je tzv. Dantzigovo pravidlo. Vstupující proměnná je ta, která má v řádku účelové funkce největší kladnou hodnotu r_j. Tím se maximalizuje okamžité zlepšení účelové funkce na jednotku zvýšení vstupující proměnné. V případě rovnosti hodnot se obvykle rozhoduje podle nejmenšího indexu.

3. Pravidlo maximálního zvýšení účelové funkce. Toto pravidlo (varianta Dantzigova principu) volí proměnnou, která přináší největší *skutečné* zvýšení hodnoty účelové funkce na jednotku kroku. V každém kroku se tedy volí index, pro který je součin

$$r_j \cdot \Delta x_j$$

maximální, kde Δx_j je povolené zvýšení proměnné podle poměrového testu (4.2). Toto pravidlo bývá teoreticky výhodnější, ale výpočetně náročnější.

Poznámka 6.4: Poznámka k minimalizačnímu tvaru

V literatuře se toto pravidlo často uvádí pro *minimalizační* úlohy, kde se volí proměnná způsobující největší pokles hodnoty účelové funkce. Proto se v angličtině obvykle nazývá *maximum decrement rule* nebo *rule of maximum reduction of the objective function.* V našem výkladu pracujeme s maximalizačním tvarem, a proto pravidlo přirozeně odpovídá výběru proměnné s největším zvýšením účelové funkce.

4. Pravidlo nejstrmější hrany (steepest edge). Toto pravidlo vybírá vstupující proměnnou tak, aby odpovídající krok vedl po hraně přípustné množiny v nejvýhodnějším směru z hlediska růstu účelové funkce. Z geometrického pohledu se snažíme zvolit hranu, která svírá s vektorem účelové funkce nejmenší úhel – tedy směr s největším „stoupáním“ vzhledem k délce kroku.

Při zvýšení nebázické proměnné x_j se mění bázické proměnné podle $d_j = A_B^{-1}a_j$. Hodnota r_j udává nárůst účelové funkce, zatímco $\|d_j\|$ vyjadřuje délku odpovídající hrany v bázickém prostoru. Proto se vybírá proměnná maximalizující podíl

$$\frac{r_j}{\|A_B^{-1}a_j\|},$$

tedy zlepšení účelové funkce na jednotku délky kroku.

2.2 Cyklení a anticyklická pravidla

Simplexová metoda je pro *nedegenerované* úlohy vždy konečná. Pro *degenerované* úlohy však může nastat situace, kdy se po několika pivotových krocích (kdy pravidla pro vstupující a vystupující proměnné jsme již popsali) tabulka opakuje, aniž by se změnila hodnota účelové funkce. Tento jev nazýváme *zacyklení*.

Cyklení vzniká výhradně u degenerovaných úloh a je důsledkem nejednoznačnosti ve výběru vstupující nebo vystupující proměnné. Bez speciálního ošetření může metoda přecházet mezi několika bázemi, které reprezentují tentýž vrchol. Krátce si představíme tři klasické přístupy, které cyklení vylučují.

1. Blandovo pravidlo. Blandovo pravidlo, publikováno v roce 1977, stanovuje, že se vždy vybírá proměnná s nejmenším indexem — a to jak pro vstupující, tak i pro vystupující proměnnou. Bez hlubších detailů poznamenejme, že toto pravidlo zaručuje, že simplexová metoda nikdy nezacyklí, protože posloupnost navštívených bází je lexikograficky rostoucí. Nevýhodou je mírné zpomalení výpočtu, ale v praxi slouží jako spolehlivá pojistka.

2. Lexikografické pravidlo. Lexikografické pivotování je silnější variantou Blandova přístupu. Namísto pouhého porovnávání indexů se při rovnosti poměrů porovnávají celé normalizované řádky tabulky lexikograficky. Z každé množiny kandidátů se vybere ten řádek, jehož normalizovaný vektor je lexikograficky nejmenší. Tento postup je deterministický, konečný a často se používá i v symbolické formě (například při teoretických důkazech vlastností simplexové metody).

3. Perturbační metoda. Třetí přístup, označovaný jako *perturbační metoda*, spočívá v tom, že se k pravé straně omezení $\mathbf{b}$ přičtou malé vzájemně různé hodnoty $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, čímž se úloha uměle stane nedegenerovanou. Tímto způsobem se jednoznačně určí pořadí pivotů a metoda se cyklu vyhne. V praktických implementacích se často používá tzv. *symbolická perturbace*, při níž se s hodnotami ε_i zachází formálně.

Poznámka 6.5: Intuice za perturbační metodou

Zdůrazněme, že ve skutečnosti perturbační metoda ve skutečnosti nemění samotnou úlohu, ale pouze formálně rozlišuje rovnosti v degenerovaných případech. Jak bylo poznamenáno, úloha se řeší s parametry ε_i symbolicky, tj. pracujeme s limitou $\varepsilon_i \to 0^+$. V této limitě získáme řešení, které přesně splňuje původní podmínky

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

takže výsledek perturbované úlohy odpovídá řešení úlohy původní.

Pro zajištění konečnosti simplexové metody postačí aplikovat kterékoli z uvedených anticyklických pravidel. Ve všech případech platí, že degenerace stále sice může vést k nulovým krokům, nikdy však nezpůsobí nekonečný cyklus.

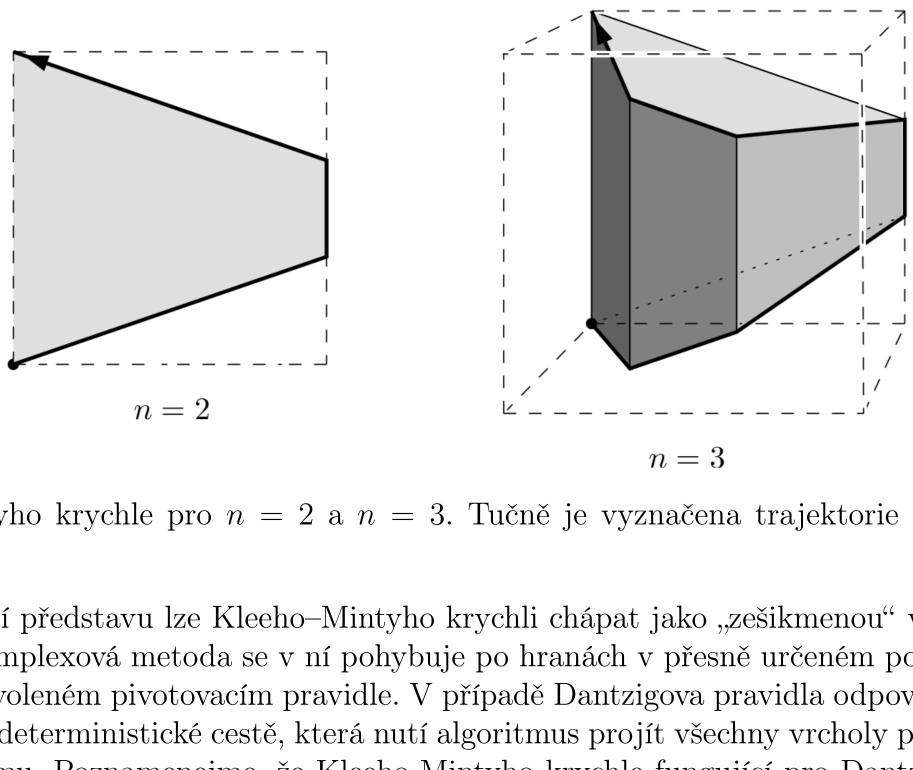
3 Efektivita simplexové metody

V praxi funguje simplexová metoda velmi dobře i pro úlohy s velkým počtem proměnných a omezení. Počet kroků potřebných k nalezení optima bývá v typických případech překvapivě malý — pro úlohu v rovnicovém tvaru s m omezeními se většinou vystačí s přibližně $2m$ až $3m$ pivoty, jak vyplývá z výpočetních experimentů.

3.1 Kleeho–Mintyho příklad

Z teoretického hlediska je ovšem znám výsledek, který ukázal, že simplexová metoda nemusí být vždy rychlá. Victor Klee a George Minty sestrojili v roce 1972 rodinu umělých úloh lineárního programování, pro něž simplexová metoda s klasickým Dantzigovým pravidlem navštíví *všechny* vrcholy přípustné množiny.

Jejich konstrukce, známá jako *Kleeho–Mintyho krychle*, je založena na vhodné deformaci n-rozměrné jednotkové krychle. Tato deformace zajistí, že simplexová metoda postupuje přesně po jejích vrcholech v jediném určeném pořadí, a než dosáhne optima, projde celkem $2^n - 1$ pivotů. To znamená, že v nejhorším případě je počet kroků exponenciální v počtu proměnných.



Klee–Mintyho krychle pro $n = 2$ a $n = 3$. Tučně je vyznačena trajektorie simplexové metody.

Pro lepší představu lze Kleeho–Mintyho krychli chápat jako „zešikmenou“ verzi běžné krychle. Simplexová metoda se v ní pohybuje po hranách v přesně určeném pořadí, které závisí na zvoleném pivotovacím pravidle. V případě Dantzigova pravidla odpovídá trajektorie zcela deterministické cestě, která nutí algoritmus projít všechny vrcholy postupně až k poslednímu. Poznamenejme, že Kleeho-Mintyho krychle fungující pro Dantzigovo pravidlo vypadá rozhodně bizarněji, než výše uvedný obrázek, a autor si ji zde proto kvůli svým grafickým limitacím vyhrazuje vynechat.

Podobné konstrukce s exponenciálně mnoha pivoty byly nalezeny pro řadu deterministických pravidel. U náhodných pravidel jsou známé subexponenciální horní i dolní meze – v abstraktních modelech dokonce existují i exponenciální dolní meze.

Naštěstí se takové příklady v praxi téměř nevyskytují. Pro běžně formulované úlohy vede simplexová metoda k optimu velmi rychle.

3.2 Teoretické hranice

Dosud nebylo nalezeno pivotovací pravidlo, pro které by se dalo dokázat, že počet kroků simplexové metody je vždy omezen nějakou *polynomiální funkcí* počtu proměnných n a omezení m. Nejlepší známé výsledky ukazují, že některá pravděpodobnostní pivotovací pravidla mají v průměru očekávaný počet pivotů řádu

$$\mathcal{O}\left(e^{C\sqrt{n \ln n}}\right),$$

kde C je „nevelká“ konstanta, kterou dále rozebírat nebudeme. Tato hodnota je sice výrazně lepší než exponenciální 2^n, ale stále horší než polynomiální čas.

Otázka, zda existuje pivotovací pravidlo simplexové metody, které by zaručilo *polynomiální* horní mez počtu pivotů (silně polynomiální v n, m), zůstává otevřená.

Historická *Hirschova domněnka*[1], která šla dát se zmíněným otevřeným problémem do souvislosti, (že průměr grafu vrcholů mnohostěnu je nejvýše „počet stěn minus dimenze“) v obecné podobě již jistě *neplatí*[2]. Přesná obecná horní mez průměru však stále není známa – nejlepší známé obecné meze jsou kvazipolynomiální, nikoli polynomiální. Pro některé speciální třídy polyedrů platí ostřejší (často polynomiální) odhady.

Poznámka 6.6: Průměr vs. počet pivotů

Průměr grafu polyedru a počet pivotů simplexové metody spolu souvisejí, ale nejsou totožné veličiny: průměr je čistě geometrická charakteristika, zatímco počet pivotů závisí i na zvoleném pivotovacím pravidle a konkrétní trajektorii algoritmu.

[1] *Domněnka* (lze ji zde najít, nejde však o první zmínku, ta pochází z dílny Warrena M. Hirsche z roku 1957): E. D. Kim, F. Santos, *An Update on the Hirsch Conjecture* (2009), https://arxiv.org/pdf/0907.1186.

[2] *Protipříklad:* F. Santos, *A Counterexample to the Hirsch Conjecture*, *Annals of Mathematics* 176(1):383–412 (2012), https://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v176-n1-p07-p.pdf.