KAPITOLA 4

SIMPLEXOVÝ ALGORITMUS — ZÁKLADY METODY.

Tato kapitola představuje výpočetní jádro LP ve standardním *rovnicovém tvaru* v podobě základní simplexové metody. Budeme pracovat s bázicky přípustnými řešeními a se *simplexovými tabulkami*, tj. speciálně uspořádanými soustavami rovnic pro proměnné $x_1, \ldots, x_n$ a pomocnou proměnnou z reprezentující hodnotu účelové funkce.

1 Úvodní příklad bez potíží

Simplexový algoritmus (Dantzig, 1947) řeší úlohy lineárního programování postupným přechodem mezi bázicky přípustnými body polyedru. Geometricky si můžeme metodu představit tak, že vybírá hranu přípustné oblasti, po níž se hodnota účelové funkce zvyšuje, a přesouvá se z jednoho vrcholu do sousedního, dokud nenarazí na optimum nebo neprokáže neomezenost. Výpočtově pracujeme se *simplexovou tabulkou* a elementárními řádkovými úpravami v duchu Gaussovy eliminace. V praxi existuje mnoho optimalizací, zde, v rámci této kapitoli, si však vystačíme se základní jednofázovou verzí.

Budeme používat úlohu v *maximalizačním rovnicovém tvaru*

$$\max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \quad \text{při} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0,$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má řádky lineárně nezávislé.

Pro zahájení metody předpokládáme, že máme k dispozici výchozí bázicky přípustný bod $\mathbf{x}^{[0]}$ (způsoby jeho nalezení budou uvedeny později). Algoritmus pak generuje posloupnost bázických přípustných bodů $\mathbf{x}^{[0]}, \mathbf{x}^{[1]}, \ldots$, kde po sobě jdoucí body jsou *sousední* (sdílejí $m-1$ bázických proměnných). V p-tém kroku simplexové metody se odhalí právě jedna z možností:

1. $\mathbf{x}^{[p]}$ je optimální.
2. Úloha je neomezená.
3. Existuje sousední bázicky bod $\mathbf{x}^{[p+1]}$ se *zvětšenou* hodnotou $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^{[p+1]} > \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^{[p]}$, který z tabulky přímo zkonstruujeme.

V následujícím příkladu ukážeme celý postup na konkrétní úloze a poté odděleně vysvětlíme simplexovou metodu obecně.

Příklad 4.1: Úvodní příklad na simplexovou metodu

Začneme řešením elementární úlohy v nerovnicovém tvaru

$$\textbf{maximalizovat} \quad x_1 + x_2 \qquad \textbf{za podmínek} \qquad \begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1,\\ x_1 &\leq 3,\\ x_2 &\leq 2,\\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Po zavedení pomocných proměnných x_3, x_4, x_5 dostaneme rovnicový tvar

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1, \qquad x_1 + x_4 = 3, \qquad x_2 + x_5 = 2, \qquad x_{1,2,3,4,5} \geq 0,$$

a rovnici účelové funkce $z = x_1 + x_2$. Této úloze přiřadíme tzv. počáteční *simplexovou tabulku*:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 + x_1 - x_2,\\ x_4 &= 3 - x_1,\\ x_5 &= 2 - x_2,\\ z &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Pro $x_1 = x_2 = 0$ je bázicky přípustné řešení $x = (0, 0, 1, 3, 2)$ a $z = 0$.

Krok 1. Vstupuje x_2, vystupuje x_3. Zvyšujeme z volbou nebázické proměnné s kladným koeficientem v posledním řádku; vhodné jsou x_1 i x_2. Zvolíme x_2. Nezápornost bázických proměnných omezuje růst x_2 podmínkami

$$x_3 = 1 - x_2 \geq 0, \quad x_4 = 3 \geq 0, \quad x_5 = 2 - x_2 \geq 0,$$

tedy nejpřísněji $x_2 \leq 1$. Položíme $x_2 = 1$ a $x_3 = 0$. Z první rovnice vyjádříme

$$x_2 = 1 + x_1 - x_3$$

a dosazením získáme novou tabulku

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 + x_1 - x_3, \\ x_4 &= 3 - x_1, \\ x_5 &= 1 - x_1 + x_3, \\ z &= 1 + 2x_1 - x_3, \end{aligned}$$

s bází $\{2, 4, 5\}$ a hodnotou $z = 1$ (pro $x_1 = x_3 = 0$).

Krok 2. Vstupuje x_1, vystupuje x_5. z-řádek má kladný koeficient u x_1, takže můžeme růst z zajišťovat zvyšováním x_1. Omezení:

$$x_2 = 1 + x_1 \text{ (neomezuje)}, \quad x_4 = 3 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 3, \quad x_5 = 1 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 1.$$

Nejpřísnější je $x_1 \leq 1$, proto nastavíme $x_1 = 1$ a $x_5 = 0$. Z třetí rovnice vyjádříme

$$x_1 = 1 + x_3 - x_5$$

a po dosazení:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_3 - x_5, \\ x_2 &= 2 - x_5, \\ x_4 &= 2 - x_3 + x_5, \\ z &= 3 + x_3 - 2x_5. \end{aligned}$$

Báze je nyní $\{1, 2, 4\}$ a pro $x_3 = x_5 = 0$ dostáváme $z = 3$.

Krok 3. Vstupuje x_3, vystupuje x_4. Z-řádek dovoluje zvyšovat x_3. Nezápornost omezuje jen rovnice

$$x_4 = 2 - x_3 + x_5 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 2 + x_5,$$

ostatní bázické proměnné nezápornost neporuší. Položíme $x_5 = 0$ a $x_3 = 2$, čímž $x_4 = 0$. Z třetí rovnice dostaneme

$$x_3 = 2 + x_5 - x_4,$$

a finální tabulka má tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - x_4, \\ x_2 &= 2 - x_5, \\ x_3 &= 2 - x_4 + x_5, \\ z &= 5 - x_4 - x_5. \end{aligned}$$

V posledním řádku jsou koeficienty nebázických proměnných nekladné, takže nelze zvýšit z bez porušení přípustnosti. Optimální řešení je

$$\mathbf{x} = (3, 2, 2, 0, 0), \qquad z^\star = 5.$$

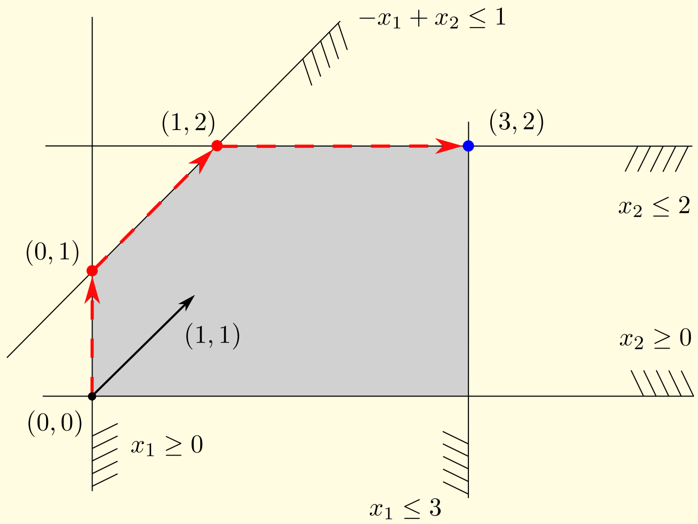
Skutečně jsme našli optimální řešení. Uvažme libovolné přípustné řešení $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_5)$ naší úlohy, s hodnotou účelové funkce rovnou nějakému $\tilde{z}$. Jistě $\tilde{\mathbf{x}}$ a $\tilde{z}$ splňují všechny rovnice v poslední tabulce, které jsme dostali z původních rovnic úlohy ekvivalentními úpravami, a tedy musí platit

$$\tilde{z} = 5 - \tilde{x}_4 - \tilde{x}_5.$$

To spolu s podmínkami nezápornosti $\tilde{x}_4, \tilde{x}_5 \geq 0$ dává $\tilde{z} \leq 5$. Tabulka dokonce i navíc poskytuje i důkaz, že $\mathbf{x} = (3, 2, 2, 0, 0)$ je *jediné* optimální řešení: pokud $z = 5$, tak $x_4 = x_5 = 0$, a to jednoznačně určuje hodnoty ostatních proměnných.

Poznámka 4.2: Geometrická ilustrace.

Postup metody odpovídá posunu z vrcholu do vrcholu po hranách přípustného mnohoúhelníku ve směru růstu $x_1 + x_2$. Trajektorii ukazuje obrázek:



2 Neomezenost úlohy a více optimálních řešení

V předchozím jednoduchém příkladu proběhl algoritmus bez zádrhelů. V praxi se však mohou objevit komplikace, které podrobně popíšeme později. Nejdříve prozkoumáme, jak se metoda chová při neomezenosti úlohy a jak odhalí vícero optimálních řešení úlohy.

Příklad 4.3: Neomezenost úlohy

Ukažme na příkladu, jak simplex rozpozná neomezenou úlohu

$$\textbf{maximalizovat} \quad x_1 \qquad \textbf{za podmínek} \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 1, \\ -x_1 + x_2 &\le 2, \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Po zavedení x_3, x_4 a rovnici $z = x_1$ máme

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 - x_1 + x_2, \\ x_4 &= 2 + x_1 - x_2, \\ z &= x_1. \end{aligned}$$

V z-řádku má x_1 kladný koeficient, proto jej zavedeme do báze; z první rovnice

$$x_1 = 1 + x_2 - x_3,$$

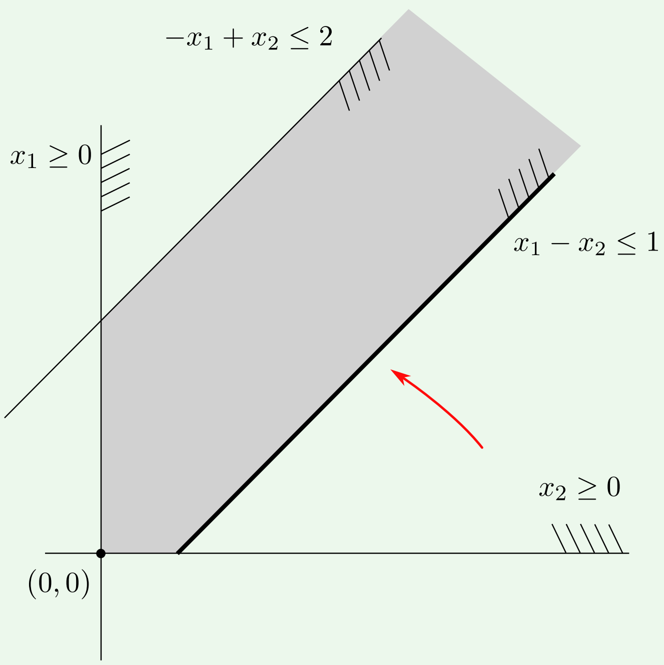
a po dosazení

$$x_4 = 3 - x_3, \qquad z = 1 + x_2 - x_3.$$

Pokud nyní chceme zavést do báze x_2, všimneme si, že žádná rovnice nerestriktuje jeho růst: v pravých stranách se x_2 neobjevuje se záporným koeficientem. Můžeme tedy volit $x_2 = t$, $x_3 = 0$ libovolně velké a dostáváme

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, z) = (1 + t,\ t,\ 0,\ 3,\ 1 + t), \qquad t \ge 0,$$

což dokládá neomezenost. Geometricky jde o polopřímku na hraně přípustné oblasti:



Příklad 4.4: Simplexová metoda — úsečka optimálních řešení

Pomocí simplexové tabulky vyřešme následující maximalizační úlohu:

$$\textbf{maximalizovat} \quad x_1 + x_2 \qquad \textbf{za podmínek} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5, \\ x_1 &\leq 4, \\ x_2 &\leq 3, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Po přidání doplňkových proměnných x_3, x_4, x_5 získáme soustavu

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5, \qquad x_1 + x_4 = 4, \qquad x_2 + x_5 = 3, \qquad x_{1,2,3,4,5} \geq 0,$$

a účelovou funkci

$$z = x_1 + x_2.$$

Počáteční simplexová tabulka:

$$\begin{aligned} x_3 &= 5 - x_1 - x_2, \\ x_4 &= 4 - x_1, \\ x_5 &= 3 - x_2, \\ z &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Krok 1. Vybereme x_2 jako vstupující. Omezení:

$$x_3 = 5 - x_1 - x_2, \quad x_4 = 4 - x_1, \quad x_5 = 3 - x_2.$$

Nejpřísněji omezuje $x_2 \leq 3$ (třetí rovnice), proto x_5 vystupuje a

$$x_2 = 3 - x_5.$$

Dosadíme:

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 - x_1 + x_5, \\ x_4 &= 4 - x_1, \\ x_2 &= 3 - x_5, \\ z &= 3 + x_1 - x_5. \end{aligned}$$

Báze $\{2, 3, 4\}$, pro $x_1 = x_5 = 0$ je $z = 3$.

Krok 2. Zvyšujeme x_1. Omezení:

$$x_3 = 2 - x_1 + x_5 \geq 0, \qquad x_4 = 4 - x_1 \geq 0.$$

Nejpřísněji omezuje $x_1 \leq 2$ (první rovnice). Vstoupí x_1, vystoupí x_3:

$$x_1 = 2 + x_5 - x_3.$$

Po dosazení:

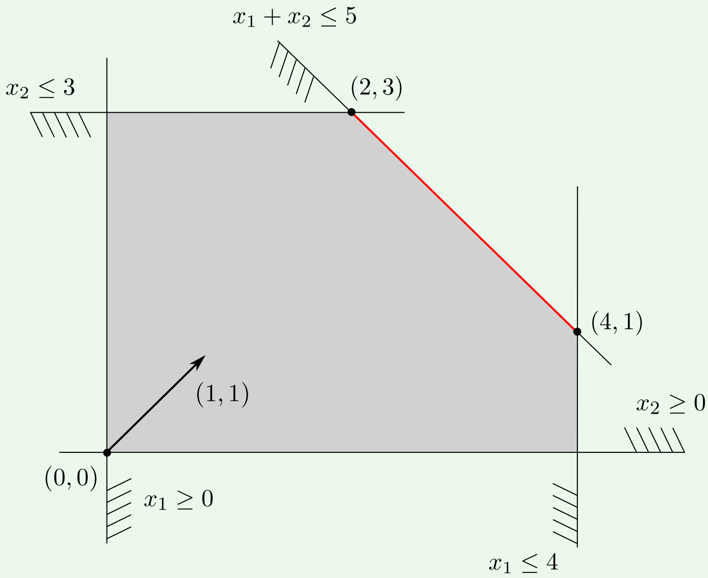
$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + x_5 - x_3, \\ x_2 &= 3 - x_5, \\ x_4 &= 2 - x_5 + x_3, \\ z &= 5 - x_3. \end{aligned}$$

Báze $\{1, 2, 4\}$. Pro $x_3 = x_5 = 0$ je $z = 5$.

Optimální řešení. V z-řádku nejsou kladné koeficienty a u x_5 je nula, jsme v optimu. Avšak rozebereme-li si řešení, vidíme, že při $x_3 = 0$ a $x_5 \in [0, 2]$:

$$(x_1, x_2) = (2 + x_5,\ 3 - x_5), \qquad z = 5,$$

tj. úsečka mezi $(2, 3)$ a $(4, 1)$ určuje body, kde v každém z nich je nabýváno optimální hodnoty.



3 Simplexové tabulky

To, co jsme zatím vysvětlili pouze příkladech, zkusme zformulovat v této a následující sekci obecně.

Uvažujme obecnou maximalizační úlohu v rovnicovém tvaru

$$\textbf{maximalizovat} \quad \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \qquad \textbf{za podmínek} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge 0,$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má řádky lineárně nezávislé a přípustná množina není prázdná. Pro přípustnou bázi $B \subseteq \{1, \dots, n\}$, $|B| = m$, označme $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$.

Simplexová tabulka

Simplexová tabulka přiřazená bázi B je soustava

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \mathbf{p} + Q\,\mathbf{x}_N, \\ z &= z_0 + \mathbf{r}^\mathsf{T}\mathbf{x}_N, \end{aligned} \tag{4.1}$$

jejíž množina řešení v proměnných $(\mathbf{x}, z)$ je shodná s množinou řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $z = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$. Zde $\mathbf{x}_B$ je vektor bázických proměnných, $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$, $\mathbf{x}_N$ je vektor nebázických proměnných. Dále $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n-m}$, $z_0 \in \mathbb{R}$ a $Q \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$.

Bázicky přípustné řešení k simplexové tabulce okamžitě vyčteme: dosadíme $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, tedy $\mathbf{x}_B = \mathbf{p}$ a hodnota účelové funkce je $z = z_0$.

Tvary $\mathbf{p}, Q, \mathbf{r}$ a z_0 lze snadno vyjádřit pomocí B a $A, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Podotkněme, že následující vzorečky je ale zbytečné si pamatovat, v případě potřeby se lehce odvodí.

Lemma 4.5: Jednoznačnost a tvar koeficientů simplexové tabulky

Pro každou přípustnou bázi B existuje právě jedna tabulka (4.1) a její koeficienty jsou dány

$$Q = -A_B^{-1} A_N, \qquad \mathbf{p} = A_B^{-1}\mathbf{b}, \qquad z_0 = \mathbf{c}_B^\mathsf{T} A_B^{-1}\mathbf{b}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{c}_N - \left(\mathbf{c}_B^\mathsf{T} A_B^{-1} A_N\right)^\mathsf{T}.$$

Důkaz lemma.

Důkaz pouze naznačíme, detaily jsou přenechány čtenáři. Z $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ po rozkladu na bázi a nebázi dostaneme $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b} - A_B^{-1} A_N \mathbf{x}_N$, tj. první řádek. Druhý řádek vznikne dosazením do $z = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{c}_B^\mathsf{T}\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^\mathsf{T}\mathbf{x}_N$. Jednoznačnost plyne z jednoznačnosti A_B^{-1} a dokáže se sporem uvažováním jiné simplexové tabulky pro stejnou bázi B. ■

4 Simplexová metoda – obecné základy

4.1 Kritérium optimality

Splňuje-li v tabulce (4.1) poslední řádek, že jsou všechny koeficienty u nebázických proměnných nekladné, tj.

$$\mathbf{r} \le \mathbf{0},$$

pak příslušné bázické přípustné řešení je optimální. Skutečně, bázické přípustné řešení příslušné takové tabulce má účelovou funkci rovnou z_0, a pro libovolné jiné přípustné řešení $\tilde{\mathbf{x}}$ máme $\tilde{\mathbf{x}}_N \ge 0$ a

$$\mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}} = z_0 + \mathbf{r}^T\tilde{\mathbf{x}}_N \le z_0.$$

4.2 Pivot – volba vstupující a vystupující proměnné

Přechod z báze B na novou bázi B' se řídí dvěma kroky:

- **Vstupující proměnná.** Zvolíme některou nebázickou proměnnou x_v s *kladným* koeficientem v z-řádku, tj. $r_v > 0$. Jen u těchto proměnných může růst x_v zvětšit z. Toto kritérium typicky splňuje několik nebázických proměnných, takže pro vstupující proměnnou je obvykle víc možností. O jejím výběru řekneme více v následující kapitole.

- **Vystupující proměnná.** Zachovejme nezápornost bázických proměnných při zvyšování x_v. Pišme tabulku po složkách jako

$$x_{j_i} \;=\; p_i + \sum_{k=1}^{n-m} q_{ik}\, x_{\ell_k}, \qquad i = 1, \dots, m,$$

  kde $B = \{j_1 < \cdots < j_m\}$ a $N = \{\ell_1 < \cdots < \ell_{n-m}\}$. Řečeno slovy, j_i je i-tý nejmenší prvek množiny B a ℓ_k je k-tý nejmenší prvek množiny N.

Nechť $v = \ell_t$ je index zvolené vstupující proměnné. Protože všechny nebázické proměnné x_{ℓ_k}, $k \neq t$, mají zůstat nulové, podmínka nezápornosti proměnné x_{j_i} omezuje možné hodnoty vstupující proměnné x_{ℓ_t} prostřednictvím nerovnosti $-q_{it} x_{\ell_t} \leq p_i$.

Pokud $q_{it} \geq 0$, tato nerovnost zvyšování x_{ℓ_t} nijak neomezuje, zatímco pro $q_{it} < 0$ dává ohraničení $x_{\ell_t} \leq -p_i/q_{it}$. Tedy volíme x_{j_s} jako *vystupující*, kde

$$q_{st} < 0 \quad \text{a} \quad -\frac{p_s}{q_{st}} = \min\Big\{-\frac{p_i}{q_{it}} \mid q_{it} < 0,\ i = 1, \ldots, m\Big\}. \tag{4.2}$$

To znamená, že v uvažované simplexové tabulce si všímáme jen řádků, v nichž je koeficient x_v záporný. V těchto rádcích tím koeficientem vydělíme složku vektoru $\mathbf{p}$, změníme znaménko, a ze všech takových podílů hledáme minimum.

Pokud neexistuje žádný řádek s $q_{it} < 0$, pak lze x_v zvětšovat bez omezení a úloha je neomezená.

Formálně musíme ukázat, že funkčnost simplexové metody je při pivotování zachována.

Lemma 4.6: Korektnost pivotu

Nechť B je přípustná báze a zvolíme x_v a x_{j_s} podle pravidel výše. Pak nová báze $B' = (B \setminus \{j_s\}) \cup \{v\}$ je přípustná. Pokud není splněna žádná podmínka pro volbu vystupující proměnné, je úloha neomezená.

Důkaz lemma vynecháme, protože není nikterak záživný.

Poznámka 4.7: Úsečka optim s novým značením

Uvažujme poslední příklad, kde jsme narazili na úsečku určující nekonečně mnoho optimálních řešení úlohy. V poslední tabulce obecně platí

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{p} + Q\,\mathbf{x}_N, \qquad z = z_0 + \mathbf{r}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_N.$$

Pro max-úlohu: $\mathbf{r} \leq 0$ znamená optimum. Je-li však *některé* $r_v = 0$, pak lze zvyšovat x_v bez změny z. Pokud současně existuje řádek s $q_{iv} < 0$, ratio-test dává interval $t \in \big[0, \min\{-p_i/q_{iv} \mid q_{iv} < 0\}\big]$. Pro $t = 0$ jsme v jednom optimálním BFS, pro t rovné druhému kraji intervalu získáme *jiné* optimální BFS. Tyto dva vrcholy vymezují optimální hranu a všechny jejich konvexní kombinace tvoří úsečku optim.