KAPITOLA 2

GEOMETRIE LP: KONVEXITA A BÁZICKÁ ŘEŠENÍ

Tato kapitola představuje geometrický základ lineárního programování. Vysvětlíme klíčové pojmy konvexity a popíšeme geometrii mnohostěnů. Ukážeme, jak se v mnohostěnu obecně určují vrcholy a jak je lze chápat geometricky.
Druhá část se zaměřuje na bázická přípustná řešení v rovnicovém tvaru úlohy lineárního programování. Stručně popíšeme jejich definici, základní vlastnosti a otázku degenerace, kdy stejný bod může odpovídat více bázím.

1 Úvod do konvexity

Konvexita je velmi důležitý pojem a to nejen v teorii lineárního programování. Připomeneme zkraje několik nejzásadnějších definic a výsledků, díky kterým budeme moct snadněji získat geometrickou představu o řešení LP.

1.1 Konvexní kombinace, konvexní a afinní obal

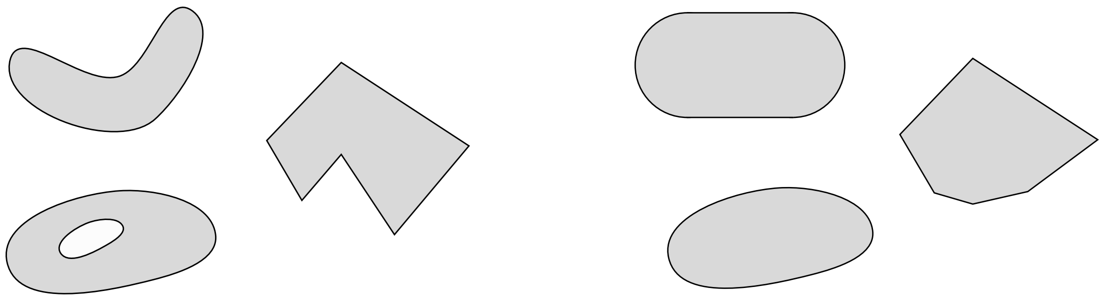
Začněme samotným pojmem konvexní kombinace a konvexní množiny. Tyto pojmy tvoří základní kámen geometrie lineárního programování – umožní nám později přesně popsat polyedry, extrémní body i optimální řešení.

Definice 2.1: Konvexní kombinace a konvexní množina

Nechť $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nazveme *konvexní kombinací* bodů $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)} \in S$, pokud existují koeficienty $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ splňující $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ a

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, \mathbf{x}^{(i)}.$$

Množinu $C \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme *konvexní*, jestliže spolu s libovolnými $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ obsahuje i všechny konvexní kombinace tvaru $\theta\,\mathbf{x} + (1-\theta)\,\mathbf{y}$ pro $\theta \in [0,1]$.



(a) Nekonvexní **(b)** Konvexní

Obrázek 2.1: Příklady nekonvexních a konvexních množin.

Na konvexní kombinace úzce navazují afinní kombinace. Ty nám umožní odlišit ryze lineární „průběžné spojování bodů" od skutečné konvexity, která navíc vyžaduje nezápornost koeficientů.

Definice 2.2: Afinní kombinace, afinní obal, konvexní obal

Nechť $S \subseteq \mathbb{R}^n$. *Afinní kombinací* bodů $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ rozumíme výraz $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}^{(i)}$ s $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. *Afinní obal* $\operatorname{aff}(S)$ je množina všech afinních kombinací bodů z S. *Konvexní obal* $\operatorname{conv}(S)$ je množina všech konvexních kombinací bodů z S.

Při interpretaci je dobré mít na paměti, co přesně znamená „obal" v geometrickém smyslu – jedná se o nejmenší objekt určitého typu, který obsahuje danou množinu. V případě konvexního a afinního obalu to shrnuje následující poznámka.

Poznámka 2.3: Geometrický význam

Nechť $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Konvexní obal je „nejmenší“ konvexní množina obsahující S (v $\mathbb{R}^2$ typicky úsečky a trojúhelníky a jejich zobecnění, v $\mathbb{R}^3$ mnohoúhelníky a mnohostěny). Afinní obal je „nejmenší“ afinní podprostor obsahující S (přímky a roviny, atd.).

Příklad 2.4: Konvexní obal tří bodů

Je-li $S = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset \mathbb{R}^2$ v obecné poloze, pak $\text{conv}(S)$ je trojúhelník s vrcholy v $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Tento jednoduchý příklad nám ukazuje konkrétní podobu konvexního obalu. Nyní uvedeme obecnou charakterizaci, která platí pro libovolné množiny v $\mathbb{R}^n$.

Lemma 2.5: Charakterizace konvexního obalu

Konvexní obal C množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je roven množině

$$\tilde{C} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} t_i x_i \ ; \ m \geq 1,\ x_1, \ldots, x_m \in X,\ t_1, \ldots, t_m \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} t_i = 1 \right\}$$

všech konvexních kombinací konečně mnoha bodů z X.

Důkaz lemma.

Nejdřív dokážeme indukcí podle m, že každá konvexní kombinace musí ležet v C. Pro $m = 1$ je to zřejmé a pro $m = 2$ to plyne přímo z definice konvexity. Buď $m \geq 3$ a nechť $x = t_1 x_1 + \cdots + t_m x_m$ je konvexní kombinace bodů z X. Pro $t_m = 1$ máme $x = x_m \in C$. Pro $t_m < 1$ položme $t'_i = t_i/(1-t_m),\ i = 1, 2, \ldots, m-1$. Pak $x' = t'_1 x_1 + \cdots + t'_{m-1} x_{m-1}$ je konvexní kombinace bodů $x_1, \ldots, x_{m-1}$ (ta t'_i se sečtou na 1) a podle indukčního předpokladu $x' \in C$. Takže $x = (1 - t_m)x' + t_m x_m$ je konvexní kombinací dvou bodů z (konvexní) množiny C a také leží v C.

Tím jsme dokázali $\tilde{C} \subseteq C$. Pro opačnou inkluzi stačí ukázat, že $\tilde{C}$ je konvexní, tj. ověřit, že jsou-li $x, y \in \tilde{C}$ dvě konvexní kombinace a $t \in (0, 1)$, pak $tx + (1 - t)y$ je zase konvexní kombinace. To je zcela přímočaré a dovolíme si to vynechat. ■

Obrázek 2.2: Konvexní obal množiny X v $\mathbb{R}^2$.

1.2 Nadroviny, poloprostory a spol.

Rovinnými objekty v prostoru vyšších dimenzí jsou základním stavebním kamenem LP. Umožní nám popsat zejména přípustné oblasti lineárních programů.

Definice 2.6: Nadrovina a poloprostor

Nechť $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Nadrovina* je množina

$$H(\mathbf{a}, \beta) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \beta\}.$$

Uzavřený poloprostor je

$$H^-(\mathbf{a}, \beta) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \beta\}.$$

Každá nadrovina tedy rozděluje prostor $\mathbb{R}^n$ na dva poloprostory a je jejich společnou hranicí. Později se ukáže, že právě takto lze popsat i množinu všech přípustných řešení lineárního programu.

Definice 2.7: Afinní množina

Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *afinní*, pokud je uzavřená na afinní kombinace (tj. je posunem lineárního podprostoru).

Víme už, že konvexní kombinace a průniky spolu dobře fungují. Přesněji to vyjadřuje následující tvrzení, které se opakovaně uplatní v dalším výkladu.

Věta 2.8: Průnik konvexních množin je konvexní

Nechť $(C_i)_{i \in I}$ je rodina konvexních množin v $\mathbb{R}^n$. Pak $C := \bigcap_{i \in I} C_i$ je konvexní.

Důkaz věty.

Vezměme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ a $\theta \in [0, 1]$. Pro každé $i \in I$ jsou $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C_i$ a konvexita C_i dává $\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{y} \in C_i$. Tedy $\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{y} \in \bigcap_{i \in I} C_i = C$. ■

Tento jednoduchý fakt má dalekosáhlý důsledek, a to že průnik konečně mnoha poloprostorů je vždy konvexní množina. Nazýváme ji *konvexní mnohostěn*. Právě s těmito objekty se budeme v lineárním programování setkávat neustále.

Definice 2.9: Konvexní mnohostěn (polyedr)

Konvexní mnohostěn neboli *polyedr* je množina všech řešení konečného systému lineárních nerovnic,

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}.$$

Ekvivalentně jej můžeme chápat jako průnik konečně mnoha uzavřených poloprostorů v $\mathbb{R}^n$.

Poznámka 2.10: Omezené a neomezené mnohostěny

Všimněme si, že konvexní mnohostěn může být i neomezený, například jeden poloprostor je též konvexní mnohostěn. V literatuře se někdy konvexním mnohostěnem míní pouze mnohostěn omezený, tj. takový, který se dá umístit do nějaké dostatečně velké koule. V angličtině se proto rozlišuje *convex polyhedron*, což je konvexní mnohostěn podle naší definice, a *convex polytope*, což je omezený konvexní mnohostěn.

Konvexní mnohostěny (resp. polyedry) mohou být omezené i neomezené, mohou mít různé dimenze a v geometrii lineárního programování zastupují množiny přípustných řešení. Je proto užitečné zavést i pojem dimenze.

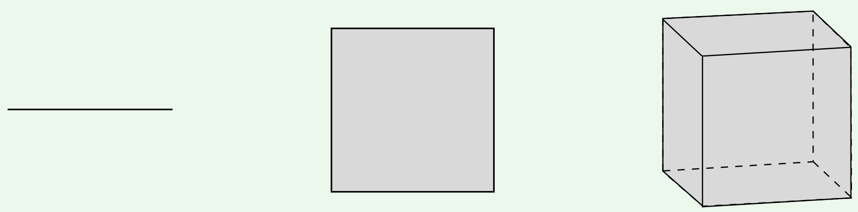
Definice 2.11: Dimenze konvexního mnohostěnu

Dimenze konvexního mnohostěnu $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je dimenze nejmenší afinní množiny (tj. afinního podprostoru), do níž lze P umístit. Ekvivalentně jde o největší d, pro nějž P obsahuje afinně nezávislou $(d+1)$-tici bodů.

Na závěr uveďme několik jednoduchých, ale ilustrativních příkladů konvexních mnohostěnů. Tyto příklady se objevují v mnoha oblastech matematiky a zároveň dobře ukazují, jak lze pomocí lineárních nerovností popsat známá tělesa.

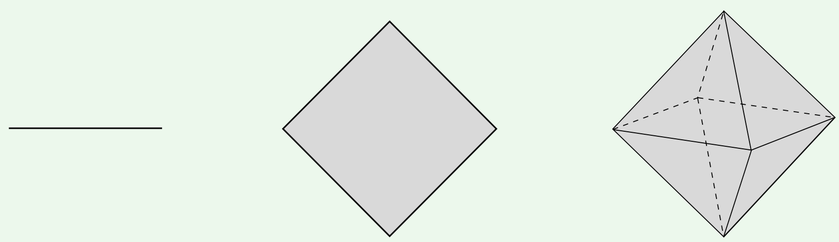
Příklad 2.12: Příklady konvexních mnohostěnů

- **n-dimenzionální krychle:** $[-1, 1]^n$, popsatelná jako průnik $2n$ poloprostorů.



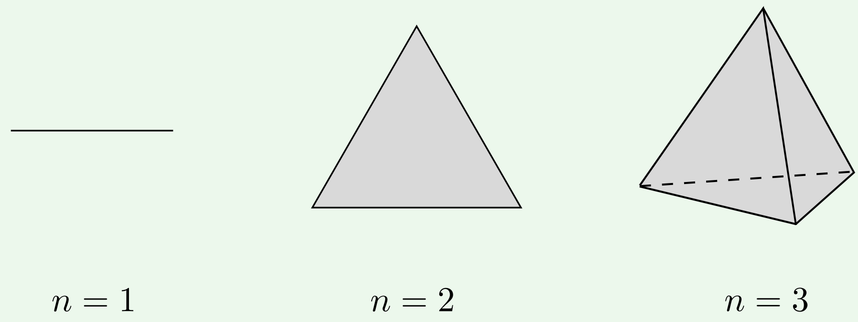
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$

- **n-dimenzionální křížový mnohostěn:** $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |x_1| + \cdots + |x_n| \leq 1\}$, pro $n = 3$ jde o pravidelný osmistěn.



$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$

- **Pravidelný n-dimenzionální simplex:** $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\}$.
Všimněme si, že simplex je množina přípustných řešení úlohy lineárního programování s jedinou rovnicí $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = 1$ a podmínkami nezápornosti. Obecně simplex v $\mathbb{R}^n$ je konvexní obal $n+1$ afinně nezávislých bodů.



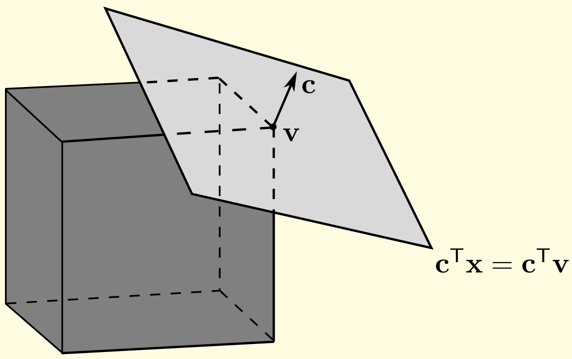
V geometrii konvexních mnohostěnů mají zvláštní význam tzv. vrcholy, tedy body představující „rohy“ či „špičky“ daného tělesa. Právě v těchto bodech se často realizují optimální řešení lineárních programů, neboť lineární funkce dosahuje svého maxima (či minima) v některém z vrcholů. Formální definici vrcholu podáme pomocí lineárních funkcí a nadrovin, které se mnohostěnu dotýkají právě v jediném bodě.

Definice 2.13: Vrchol konvexního mnohostěnu

Bod $\mathbf{v} \in P \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme *vrcholem* konvexního mnohostěnu P, pokud existuje nenulový vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{v} > \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ pro každé $\mathbf{x} \in P \setminus \{\mathbf{v}\}$. Ekvivalentně je $\mathbf{v}$ jediným místem, kde je dosaženo maxima lineární funkce $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ na P.

Poznámka 2.14: Geometrická interpretace

Vrchol konvexního mnohostěnu si můžeme představit jako „roh“ či „špičku“. Každá nadrovina tvaru $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{v}\}$, která odpovídá lineární funkci dosahující maxima v $\mathbf{v}$, se P dotýká právě v tomto bodě. Na obrázku vidíme situaci v $\mathbb{R}^3$, kde nadrovina určená vektorem $\mathbf{c}$ protíná mnohostěn pouze ve vrcholu $\mathbf{v}$.



2 Bázická přípustná řešení

V celé sekci budeme pracovat s *rovnicovým tvarem* pro maximalizační úlohu zavedeným dříve. Tento tvar je pro naši geometrii klíčový. Z kurzu lineární algebry víme, že řešením soustavy lineárních algebraických rovnic je afinní podprostor $\mathbb{R}^n$. Tedy přípustná množina je průnik této afinní množiny $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ a nezáporného ortantu[1] $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, a proto

[1]Zobecnění pojmů kvadrant v $\mathbb{R}^2$ a oktant v $\mathbb{R}^3$ do obecné dimenze.

je P konvexní mnohostěn.

Zdůrazněme zde ještě jednou zmíněné důležité pozorování, s kterým se dále setkáme i v dalších kapitolách.

Přípustná množina je konvexní mnohostěn

Nezávisle na tom, zda lineární program zapíšeme v *nerovnicovém tvaru* nebo v *rovnicovém tvaru*, vždy dostáváme **konvexní mnohostěn**, jelikož jde to průnik konečně mnoha nadrovin a poloprostorů.

Pokračujme dále s hlavním obsahem této sekce. Pro korektnost uveďme nyní důležitý předpoklad a to ten, že budeme požadovat, aby soustava rovnic z naší úlohy měla alespoň jedno řešení a že řádky matice A z úlohy jsou lineárně nezávislé.

Zjevně pokud by soustava rovnic neměla ani jedno řešení, nemělo by smysl se danou úlohou vůbec zajímat. To, že má soustava alespoň jedno řešení, snadno ověříme například použitím Gaussovy eliminace. Dále pokud by některý z řádků určující matice byl lineární kombinací ostatních, byla by příslušná rovnice nadbytečná a mohla by bez změny množiny řešení být odstraněna.

Mezi přípustnými řešeními úlohy lineárního programování mají výsadní postavení takzvaná *bázická přípustná řešení*. Než je zavedeme, ustálíme stručné značení pro výběr sloupců matice a složek vektoru.

Definice 2.15: Značení pro výběry z matice a vektoru

Nechť $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Maticí A_B rozumíme tu matici, která vznikne z A vybráním sloupců s indexy v B (v daném pořadí). Pro vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ označíme $\mathbf{x}_B$ vektor složek x_j s $j \in B$.

Toto značení nám umožní vyjádřit bázická řešení velmi stručně: „nebázické“ složky položíme na nulu a „bázické“ dopočteme ze čtvercového systému.

Definice 2.16: Bázicky přípustné řešení (BFS)

Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je *bázicky přípustné řešení* úlohy

$$\text{maximalizovat } \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \quad \text{za podmínek} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

jestliže $\mathbf{x}$ je přípustné řešení a existuje m-prvková množina $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že

- (čtvercová) matice A_B je regulární (sloupce indexované B jsou lineárně nezávislé),
- $x_j = 0$ kdykoli $j \notin B$.

Ekvivalentně: položíme-li $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ pro $N := \{1, \ldots, n\} \setminus B$, potom $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$.

Je-li taková množina B pevně zvolena, proměnným x_j s $j \in B$ říkáme *bázické proměnné*, zatímco zbývající se nazývají *nebázické*. Krátce řečeno, v bázicky přípustném řešení jsou všechny nebázické složky rovny nule a bázické jsou dány řešením soustavy $A_B\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$.

Příklad 2.17: Ukázka bázického přípustného řešení

Vektor $\mathbf{x} = (0, 2, 0, 1, 0)$ je bázicky přípustné řešení pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = (14, 7), \qquad B = \{2, 4\}.$$

Skutečně, $A_B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ je regulární a $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ pro $N = \{1, 3, 5\}$, zatímco $\mathbf{x}_B = (2, 1)$ splňuje $A_B \mathbf{x}_B = \mathbf{b}$.

Poznámka 2.18: BFS nezávisí na vektoru koeficientů účelové funkce

Všimněme si, že v definici BFS se *nevyskytuje* vektor $\mathbf{c}$. Bázicky přípustná řešení jsou čistě *geometrickou* vlastností mnohostěnu P, tedy závisejí pouze na A a $\mathbf{b}$.

Pro některé úvahy je pohodlné definici bázického přípustného řešení trochu přeformulovat.

Lemma 2.19: Přípustné řešení a lineární nezávislost

Přípustné řešení $\mathbf{x}$ úlohy v rovnicovém tvaru je bázické, právě když sloupce matice A_K jsou lineárně nezávislé, kde $K = \{j \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid x_j > 0\}$.

Důkaz lemma.

Jedna implikace je zřejmá: je-li $\mathbf{x}$ bázické přípustné řešení a B je příslušná m-prvková množina jako v definici, pak $K \subseteq B$ a sloupce matice A_K jsou lineárně nezávislé.

Obráceně, nechť $\mathbf{x}$ je takové, že sloupce matice A_K jsou lineárně nezávislé. Jestliže $|K| = m$, můžeme v definici bázického přípustného řešení prostě vzít $B = K$. Jinak doplníme K na m-prvkovou množinu B přidáním dalších $m - |K|$ indexů tak, aby sloupce matice A_B byly lineárně nezávislé. To vždycky jde, například podle Steinitzovy věty z lineární algebry (v našem případě potřebujeme lineárně nezávislou množinu sloupců A_K doplnit dalšími sloupci matice A na bázi sloupcového vektorového prostoru). ■

Věta 2.20: Jednoznačnost bázického přípustného řešení

Bázické přípustné řešení je jednoznačně určeno množinou B. To znamená, že pro každou m-prvkovou množinu $B \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, pro niž je A_B regulární, existuje nanejvýš jedno přípustné řešení $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ve kterém $x_j = 0$ pro všechna $j \notin B$.

Důkaz věty.

Aby $\mathbf{x}$ bylo přípustné, musí platit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, a levou stranu můžeme rozepsat $A\mathbf{x} = A_B\mathbf{x}_B + A_N\mathbf{x}_N$, kde $N = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus B$. Podle definice bázického přípustného řešení je vektor $\mathbf{x}_N$ nebázických proměnných roven 0, takže vektor $\mathbf{x}_B$ bázických proměnných splňuje $A_B\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$. A tady se využije podmínky, že A_B je regulární: soustava $A_B\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ má právě jedno řešení $\tilde{\mathbf{x}}_B$. Jestliže $\tilde{\mathbf{x}}_B$ má všechny složky nezáporné, pak máme pro uvažované B přesně jedno bázické přípustné řešení (doplníme $\tilde{\mathbf{x}}_B$ nulami), a jinak žádné. ■

Čtenář nechť si rozmyslí, že jednomu bázickému přípustnému řešení může odpovídat i mnoho různých množin B.

Zavedeme takovéto názvosloví: m-prvkovou množinu $B \subset \{1, 2, \dots, n\}$, pro kterou je matice A_B regulární, budeme nazývat *báze*. Jestliže navíc B určuje bázické přípustné řešení, tj. jestliže (jediné) řešení soustavy $A_B\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ je nezáporné, budeme B označovat za *přípustnou bázi*.

Námi používaný pojem báze je do jisté míry lenivé a zkrácené vyjadřování, které samozřejmě neodpovídá bázi ve smyslu definice z lineární algebry. Konkrétně tím myslíme, že množina sloupců vybrané matice A_B je báze sloupcového prostoru matice A.

S použitím tohoto názvosloví na závěr definujme ještě jeden důležitý pojem týkající se bázických přípustných řešení a úloh LP.

Definice 2.21: Degenerace bázického přípustného řešení

Řekneme, že bázicky přípustný bod $\mathbf{x} \in P$ je *nedegenerovaný*, jestliže $x_j > 0$ pro každé $j \in B$, kde B je příslušná báze. V opačném případě říkáme, že bod je *degenerovaný*.

Dále úlohu lineárního programování nazveme *nedegenerovanou*, jestliže každý bázicky přípustný bod je nedegenerovaný. V opačném případě jde o *degenerovanou* úlohu.

Degenerovanost může být způsobena např. nadbytečným omezením. Pro degenerovanou úlohu je typické, že nám různé báze dají stejný bazický přípustný bod. Degenerovanou úlohu můžeme poznat také tak, že vektor $\mathbf{b}$ je lineární kombinace podmnožiny sloupců A_B s méně než m kladnými koeficienty.

Degenerovanost úlohy ilustrujeme na příkladu.

Příklad 2.22: Bázicky přípustné body pro různé báze v degenerované úloze

Uvažujme množinu přípustných řešení

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \quad \text{kde } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Pro různé báze spočítejme odpovídající bázické body a rozhodněme o jejich přípustnosti a degeneraci. Výsledky shrneme i pomocí tzv. *nosiče*, tj. množiny indexů, kde má bod kladné složky.

Báze $B_1 = \{1, 2, 3\}$**.** Rozhodující soustava je $A_{B_1}\mathbf{x}_{B_1} = \mathbf{b}$, tj.

$$\begin{aligned} a + 2b + c &= 5, \\ 3a + 2c &= 8, \\ 2a + 2b + c &= 7. \end{aligned}$$

Řešením je $a = 2,\ b = 1,\ c = 1$. Doplníme nulami na nebázických pozicích a dostáváme

$$\mathbf{x}^{(1)} = (2, 1, 1, 0, 0).$$

Bod je přípustný a všechny bázické složky jsou kladné, tedy jde o nedegenerované BFS. Jeho nosič je $J(\mathbf{x}^{(1)}) = \{1, 2, 3\} = B_1$.

Báze $B_2 = \{2, 3, 4\}$**.** Soustava

$$\begin{aligned} 2a + b + 2c &= 5, \\ 2b + c &= 8, \\ 2a + b + c &= 7 \end{aligned}$$

má řešení $a = 2,\ b = 5,\ c = -2$. Odpovídající bod je

$$\mathbf{x}^{(2)} = (0, 2, 5, -2, 0).$$

Na bázické pozici je záporná hodnota, proto bod není přípustný.

Báze $B_3 = \{1, 3, 5\}$**.** Řešením soustavy dostáváme

$$\mathbf{x}^{(3)} = (0, 0, 3, 0, 2).$$

Tento bod je přípustný (všechny složky nezáporné), ale je *degenerovaný*, protože na bázické pozici 1 má nulovou hodnotu. Nosič je $J(\mathbf{x}^{(3)}) = \{3, 5\} \neq B_3$.

Báze $B_4 = \{2, 3, 5\}$**.** Podobným postupem získáme znovu bod

$$\mathbf{x}^{(4)} = (0, 0, 3, 0, 2).$$

Tedy stejný bázicky přípustný bod jako pro bázi B_3.

Závěr. Úloha je *degenerovaná*, protože existuje BFS s nulovou složkou na bázické pozici a také se tentýž bod dá získat z různých bází.