

Taylorova řada – vzorová řešení

Materiál ke cvičení 17–18

Jak budeme postupovat (kapitola 9 MAT2).

Základní vzorec z Věty 9.1 je

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Taylorova řada v bodě a má pak tvar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

pokud zbytek Taylorova polynomu mizí (Definice 9.6).

Budeme používat známé rozvoje v bodě 0:

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}, \quad \sin u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!}, \quad \ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n} \quad (u \in (-1, 1]).$$

V souladu se zadáním ještě použijeme speciální případ vzorce $(1+u)^p$ pro $p = -1$:

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n, \quad \frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, \quad |u| < 1.$$

U každé úlohy nejprve naznačíme *přímý postup* (výpočet derivací v bodě a), potom *postup substitucí* (položíme $h = x - a$ a převedeme úlohu na známý rozvoj v nule). Druhý postup zároveň nejlépe ukáže interval, kde řada platí.

Úloha 1

Zadání Úloha 1

Rozviňte funkci

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

do Taylorovy řady v bodě $a = 1$.

Řešení.

Přímý postup. Pro $n = 0, 1, 2, \dots$ platí

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},$$

takže v bodě $x = 1$

$$f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}.$$

Podle Taylorova vzorce tedy dostáváme

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-1)^n.$$

Postup substitucí na rozvoj v bodě 0. Položme $h = x - 1$. Pak

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{h}{2}}.$$

Použijeme známý rozvoj

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n, \quad |u| < 1.$$

Po dosazení $u = \frac{h}{2}$ dostaneme

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{h}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} h^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-1)^n.$$

Podmínka $|u| < 1$ dává

$$\left|\frac{h}{2}\right| < 1 \iff |x-1| < 2.$$

Výsledek.

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(x-1)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-1)^n, \quad |x-1| < 2.$$

Úloha 2

Zadání Úloha 2

Rozviňte funkci

$$f(x) = \ln(1+2x)$$

do Taylorovy řady v bodě $a = 1$.

Řešení.

Přímý postup. Nejprve spočítáme derivace. Pro $n \geq 1$ platí

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{2^n (n-1)!}{(1+2x)^n}.$$

Proto

$$f(1) = \ln 3, \quad f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} \frac{2^n (n-1)!}{3^n} \quad (n \geq 1).$$

Taylorova řada v bodě 1 tedy je

$$\ln(1+2x) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n (x-1)^n.$$

Postup substitucí na rozvoj v bodě 0. Položme $h = x - 1$. Pak

$$1 + 2x = 1 + 2(1 + h) = 3 + 2h = 3 \left(1 + \frac{2h}{3}\right),$$

a tedy

$$\ln(1 + 2x) = \ln 3 + \ln \left(1 + \frac{2h}{3}\right).$$

Použijeme známý rozvoj

$$\ln(1 + u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n}, \quad u \in (-1, 1].$$

Po dosazení $u = \frac{2h}{3}$ dostaneme

$$\ln(1 + 2x) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{2h}{3}\right)^n,$$

tedy po návratu k x

$$\ln(1 + 2x) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n (x - 1)^n.$$

Platí pro

$$\frac{2h}{3} \in (-1, 1] \iff x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

Výsledek.

$$\begin{aligned} \ln(1 + 2x) &= \ln 3 + \frac{2}{3}(x - 1) - \frac{2}{9}(x - 1)^2 + \frac{8}{81}(x - 1)^3 - \dots \\ &= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n (x - 1)^n, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]. \end{aligned}$$

Úloha 3

Zadání Úloha 3

Rozviňte funkci

$$f(x) = \ln(2 + 3x)$$

do Taylorovy řady v bodě $a = 4$.

Řešení.

Přímý postup. Pro $n \geq 1$ platí

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{3^n (n-1)!}{(2 + 3x)^n}.$$

V bodě $x = 4$ dostaneme

$$f(4) = \ln 14, \quad f^{(n)}(4) = (-1)^{n-1} \frac{3^n (n-1)!}{14^n}.$$

Tedy

$$\ln(2 + 3x) = \ln 14 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{3}{14}\right)^n (x - 4)^n.$$

Postup substitucí na rozvoj v bodě 0. Položme $h = x - 4$. Pak

$$2 + 3x = 2 + 3(4 + h) = 14 + 3h = 14 \left(1 + \frac{3h}{14}\right),$$

takže

$$\ln(2 + 3x) = \ln 14 + \ln \left(1 + \frac{3h}{14}\right).$$

Použijeme opět

$$\ln(1 + u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n}, \quad u \in (-1, 1].$$

Po dosažení $u = \frac{3h}{14}$ dostaneme

$$\ln(2 + 3x) = \ln 14 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{3h}{14}\right)^n,$$

čili

$$\ln(2 + 3x) = \ln 14 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{3}{14}\right)^n (x - 4)^n.$$

Podmínka je

$$\frac{3h}{14} \in (-1, 1] \iff x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{26}{3}\right].$$

Výsledek.

$$\begin{aligned} \ln(2 + 3x) &= \ln 14 + \frac{3}{14}(x - 4) - \frac{9}{392}(x - 4)^2 + \frac{9}{2744}(x - 4)^3 - \dots \\ &= \ln 14 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{3}{14}\right)^n (x - 4)^n, \quad x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{26}{3}\right]. \end{aligned}$$

Úloha 4

Zadání Úloha 4

Rozviňte funkci

$$f(x) = \cos^2 x$$

do Taylorovy řady v bodě $a = \pi$.

Řešení.

Přímý postup. Nejprve si funkci přepíšeme do tvaru

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Odtud snadno spočítáme několik prvních derivací:

$$f(\pi) = 1, \quad f'(\pi) = 0, \quad f''(\pi) = -2, \quad f'''(\pi) = 0, \quad f^{(4)}(\pi) = 8, \quad \dots$$

Obecně pro $n \geq 1$ platí

$$f^{(2n)}(\pi) = (-1)^n 2^{2n-1}, \quad f^{(2n+1)}(\pi) = 0.$$

Taylorova řada v bodě π tedy má tvar

$$\cos^2 x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} (x - \pi)^{2n}.$$

Postup substitucí na rozvoj v bodě 0. Položme $h = x - \pi$. Pak

$$\cos^2 x = \cos^2(\pi + h) = \cos^2 h = \frac{1 + \cos 2h}{2}.$$

Použijeme rozvoj kosinu:

$$\cos 2h = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2h)^{2n}}{(2n)!}.$$

Proto

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2h)^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} h^{2n}.$$

Po návratu k x dostaneme stejný výsledek.

Výsledek.

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= 1 - (x - \pi)^2 + \frac{1}{3}(x - \pi)^4 - \frac{2}{45}(x - \pi)^6 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} (x - \pi)^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Úloha 5

Zadání Úloha 5

Rozviňte funkci

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2x}$$

do Taylorovy řady v bodě $a = -2$.

Řešení.

Přímý postup. Pro $n = 0, 1, 2, \dots$ platí

$$f^{(n)}(x) = \frac{2^n n!}{(1 - 2x)^{n+1}}.$$

Tedy v bodě $x = -2$

$$f^{(n)}(-2) = \frac{2^n n!}{5^{n+1}}.$$

Taylorova řada v bodě -2 je proto

$$\frac{1}{1 - 2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n+1}} (x + 2)^n.$$

Postup substitucí na rozvoj v bodě 0. Položme $h = x + 2$. Pak

$$1 - 2x = 1 - 2(-2 + h) = 5 - 2h = 5 \left(1 - \frac{2h}{5}\right),$$

a tedy

$$\frac{1}{1 - 2x} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2h}{5}}.$$

Použijeme geometrickou řadu

$$\frac{1}{1 - u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, \quad |u| < 1.$$

Po dosazení $u = \frac{2h}{5}$ dostaneme

$$\frac{1}{1-2x} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2h}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n+1}} h^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n+1}} (x+2)^n.$$

Podmínka je

$$\left|\frac{2h}{5}\right| < 1 \iff |x+2| < \frac{5}{2}.$$

Výsledek.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2x} &= \frac{1}{5} + \frac{2}{25}(x+2) + \frac{4}{125}(x+2)^2 + \frac{8}{625}(x+2)^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n+1}} (x+2)^n, \quad |x+2| < \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Úloha 6

Zadání Úloha 6

Rozviňte funkci

$$f(x) = e^{-4x}$$

do Taylorovy řady v bodě $a = -1$.

Řešení.

Přímý postup. Pro $n = 0, 1, 2, \dots$ platí

$$f^{(n)}(x) = (-4)^n e^{-4x}.$$

V bodě -1 tedy

$$f^{(n)}(-1) = (-4)^n e^4.$$

Taylorova řada v bodě -1 je

$$e^{-4x} = e^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n!} (x+1)^n.$$

Postup substitucí na rozvoj v bodě 0. Položme $h = x + 1$. Pak

$$e^{-4x} = e^{-4(-1+h)} = e^{4-4h} = e^4 e^{-4h}.$$

Použijeme známý rozvoj exponenciály:

$$e^{-4h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4h)^n}{n!}.$$

Tedy

$$e^{-4x} = e^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n!} h^n = e^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n!} (x+1)^n.$$

Výsledek.

$$\begin{aligned} e^{-4x} &= e^4 - 4e^4(x+1) + 8e^4(x+1)^2 - \frac{32}{3}e^4(x+1)^3 + \dots \\ &= e^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n!} (x+1)^n, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Úloha 7

Zadání Úloha 7

Rozviňte funkci

$$f(x) = \cos x$$

do Taylorovy řady v bodě $a = \pi$.**Řešení.****Přímý postup.** Z derivací kosinu dostaneme v bodě π

$$f(\pi) = -1, \quad f'(\pi) = 0, \quad f''(\pi) = 1, \quad f'''(\pi) = 0, \quad \dots$$

Obecně platí

$$f^{(2n)}(\pi) = (-1)^{n+1}, \quad f^{(2n+1)}(\pi) = 0.$$

Tedy

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(\pi)}{(2n)!} (x - \pi)^{2n} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - \pi)^{2n}}{(2n)!}.$$

Postup substitucí na rozvoj v bodě 0. Položme $h = x - \pi$. Pak

$$\cos x = \cos(\pi + h) = -\cos h.$$

Použijeme známý rozvoj

$$\cos h = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n)!}.$$

Proto

$$\cos x = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n)!} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - \pi)^{2n}}{(2n)!}.$$

Výsledek.

$$\begin{aligned} \cos x &= -1 + \frac{(x - \pi)^2}{2!} - \frac{(x - \pi)^4}{4!} + \frac{(x - \pi)^6}{6!} - \dots \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - \pi)^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Úloha 8**Zadání Úloha 8**

Rozviňte funkci

$$f(x) = \sin \frac{x}{2}$$

do Taylorovy řady v bodě $a = 1$.**Řešení.****Přímý postup.** Postupně dostáváme

$$f(x) = \sin \frac{x}{2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4} \sin \frac{x}{2}, \quad f'''(x) = -\frac{1}{8} \cos \frac{x}{2}, \quad \dots$$

Proto pro $n = 0, 1, 2, \dots$ platí

$$f^{(2n)}(1) = (-1)^n \frac{\sin \frac{1}{2}}{2^{2n}}, \quad f^{(2n+1)}(1) = (-1)^n \frac{\cos \frac{1}{2}}{2^{2n+1}}.$$

Taylorova řada v bodě 1 je tedy

$$\sin \frac{x}{2} = \sin \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{2n}}{2^{2n}(2n)!} + \cos \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}.$$

Postup substitucí na rozvoj v bodě 0. Položme $h = x - 1$. Potom

$$\sin \frac{x}{2} = \sin \left(\frac{1}{2} + \frac{h}{2} \right) = \sin \frac{1}{2} \cos \frac{h}{2} + \cos \frac{1}{2} \sin \frac{h}{2}.$$

Rozvoje pro sinus a kosinus dávají

$$\cos \frac{h}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n}}{2^{2n}(2n)!}, \quad \sin \frac{h}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}.$$

Po dosazení dostaneme přesně stejný rozvoj:

$$\sin \frac{x}{2} = \sin \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n}}{2^{2n}(2n)!} + \cos \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}.$$

Po návratu k x je řada platná pro všechna reálná x .

Výsledek.

$$\begin{aligned} \sin \frac{x}{2} &= \sin \frac{1}{2} + \frac{\cos \frac{1}{2}}{2}(x-1) - \frac{\sin \frac{1}{2}}{8}(x-1)^2 - \frac{\cos \frac{1}{2}}{48}(x-1)^3 + \dots \\ &= \sin \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{2n}}{2^{2n}(2n)!} + \cos \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Úloha 9

Zadání Úloha 9

Rozviňte funkci

$$f(x) = x \ln x$$

do Taylorovy řady v bodě $a = 2$.

Řešení.

Přímý postup. Postupně dostáváme

$$f(x) = x \ln x, \quad f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x}, \quad f'''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{2}{x^3}, \quad \dots$$

Pro $n \geq 2$ je zřejmý vzor

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}.$$

Tedy v bodě $x = 2$

$$f(2) = 2 \ln 2, \quad f'(2) = \ln 2 + 1, \quad f^{(n)}(2) = (-1)^n \frac{(n-2)!}{2^{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

Taylorova řada má proto tvar

$$x \ln x = 2 \ln 2 + (\ln 2 + 1)(x-2) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n(n-1)2^{n-1}}.$$

Postup substitucí na rozvoj v bodě 0. Položme $h = x - 2$. Pak $x = 2 + h = 2 \left(1 + \frac{h}{2}\right)$, a tedy

$$x \ln x = (2 + h) \ln \left(2 \left(1 + \frac{h}{2}\right)\right) = (2 + h) \ln 2 + (2 + h) \ln \left(1 + \frac{h}{2}\right).$$

Použijeme známý rozvoj logaritmu:

$$\ln \left(1 + \frac{h}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{h}{2}\right)^n, \quad \frac{h}{2} \in (-1, 1].$$

Po dosazení dostaneme

$$x \ln x = (2 + h) \ln 2 + (2 + h) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{h}{2}\right)^n.$$

Koeficient u h je roven 1, takže lineární člen je $(\ln 2 + 1)h$. Pro $n \geq 2$ se koeficient u h^n spočítá jako

$$2 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n} + \frac{(-1)^n}{(n-1)2^{n-1}} = \frac{(-1)^n}{n(n-1)2^{n-1}}.$$

Dostáváme tedy

$$x \ln x = 2 \ln 2 + (\ln 2 + 1)h + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{h^n}{n(n-1)2^{n-1}}.$$

Po návratu k x :

$$x \ln x = 2 \ln 2 + (\ln 2 + 1)(x - 2) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - 2)^n}{n(n-1)2^{n-1}}.$$

Podmínka $\frac{h}{2} \in (-1, 1]$ znamená

$$x \in (0, 4].$$

Výsledek.

$$\begin{aligned} x \ln x &= 2 \ln 2 + (\ln 2 + 1)(x - 2) + \frac{1}{4}(x - 2)^2 - \frac{1}{24}(x - 2)^3 + \frac{1}{96}(x - 2)^4 - \dots \\ &= 2 \ln 2 + (\ln 2 + 1)(x - 2) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - 2)^n}{n(n-1)2^{n-1}}, \quad x \in (0, 4]. \end{aligned}$$

Úloha 10

Zadání Úloha 10

Rozviňte funkci

$$f(x) = x^2 + e^{3x}$$

do Taylorovy řady v bodě $a = 2$.

Řešení.

Přímý postup. Máme

$$f'(x) = 2x + 3e^{3x}, \quad f''(x) = 2 + 9e^{3x}, \quad f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x} \quad (n \geq 3).$$

V bodě $x = 2$ tedy

$$f(2) = 4 + e^6, \quad f'(2) = 4 + 3e^6, \quad f''(2) = 2 + 9e^6, \quad f^{(n)}(2) = 3^n e^6 \quad (n \geq 3).$$

Po dosazení do Taylorova vzorce dostaneme

$$f(x) = 4 + e^6 + (4 + 3e^6)(x - 2) + \left(1 + \frac{9}{2}e^6\right)(x - 2)^2 + e^6 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^n}{n!} (x - 2)^n.$$

Postup substitucí na rozvoj v bodě 0. Položme $h = x - 2$. Pak

$$x^2 = (2 + h)^2 = 4 + 4h + h^2, \quad e^{3x} = e^{3(2+h)} = e^6 e^{3h}.$$

Použijeme rozvoj exponenciály:

$$e^{3h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3h)^n}{n!}.$$

Tedy

$$x^2 + e^{3x} = 4 + 4h + h^2 + e^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3h)^n}{n!}.$$

Po návratu k x :

$$x^2 + e^{3x} = 4 + 4(x - 2) + (x - 2)^2 + e^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} (x - 2)^n.$$

To je stejný rozvoj, jen zapsaný přehledněji po rozdělení na polynomicickou a exponenciální část.

Výsledek.

$$\begin{aligned} x^2 + e^{3x} &= 4 + e^6 + (4 + 3e^6)(x - 2) + \left(1 + \frac{9}{2}e^6\right)(x - 2)^2 + \frac{9}{2}e^6(x - 2)^3 + \dots \\ &= 4 + 4(x - 2) + (x - 2)^2 + e^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} (x - 2)^n, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Úloha 11

Zadání Úloha 11

Rozviňte funkci

$$f(x) = x \sin x$$

do Taylorovy řady v bodě $a = 0$.

Řešení.

Přímý postup. Protože střed je přímo $a = 0$, není třeba žádný posun. Použijeme Leibnizovo pravidlo. Jelikož vyšší derivace funkce x od druhého řádu mizí, dostaneme pro každé $n \geq 1$

$$f^{(n)}(x) = x \sin^{(n)} x + n \sin^{(n-1)} x.$$

Po dosazení $x = 0$ tedy

$$f^{(n)}(0) = n \sin^{(n-1)} 0.$$

Odtud plyne

$$f^{(2n+1)}(0) = 0, \quad f^{(2n+2)}(0) = (2n + 2)(-1)^n.$$

Taylorova řada v bodě 0 je proto

$$x \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+2)}(0)}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}.$$

Postup přes známý rozvoj v bodě 0. Známe rozvoj

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Vynásobením x dostaneme přímo

$$x \sin x = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}.$$

Výsledek.

$$x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Úloha 12

Zadání Úloha 12

Rozviňte funkci

$$f(x) = \ln(x^2)$$

do Taylorovy řady v bodě $a = 1$.

Řešení.

Přímý postup. V okolí bodu 1 je $x > 0$, takže můžeme psát $\ln(x^2) = 2 \ln x$. Potom

$$f'(x) = \frac{2}{x}, \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{4}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{12}{x^4}, \quad \dots$$

Pro $n \geq 1$ platí vzorec

$$f^{(n)}(x) = 2(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

V bodě $x = 1$ tedy

$$f(1) = 0, \quad f^{(n)}(1) = 2(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Taylorova řada v bodě 1 je proto

$$\ln(x^2) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

Postup substitucí na rozvoj v bodě 0. Položme $h = x - 1$. Pro $|h|$ dost malé je $x = 1 + h > 0$, takže

$$\ln(x^2) = 2 \ln x = 2 \ln(1 + h).$$

Použijeme známý rozvoj logaritmu:

$$\ln(1 + h) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{h^n}{n}, \quad h \in (-1, 1].$$

Tedy

$$\ln(x^2) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{h^n}{n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

Podmínka je

$$h \in (-1, 1] \iff x \in (0, 2].$$

Výsledek.

$$\begin{aligned}\ln(x^2) &= 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{2}(x-1)^4 + \dots \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad x \in (0, 2].\end{aligned}$$