

Suprema a infima – vzorová řešení

Materiál k úlohám ze sbírky

Hlavní opora: kapitola 6 *Supremum a infimum*; v několika odhadech používáme i elementární úpravy z kapitol 1 a 7.

Použitý vzor důkazu (podle Věty 6.7 a 6.8 ze skript MAT2).

Chceme-li dokázat, že $\sup M = s$, ověříme dvě vlastnosti:

S1. s je horní závora množiny M , tedy $(\forall x \in M)(x \leq s)$.

S2. s je nejmenší horní závora, tedy $(\forall s' \in \mathbb{R})(s' < s)(\exists x \in M)(s' < x)$.

Chceme-li dokázat, že $\inf M = i$, ověříme dvě vlastnosti:

I1. i je dolní závora množiny M , tedy $(\forall x \in M)(x \geq i)$.

I2. i je největší dolní závora, tedy $(\forall i' \in \mathbb{R})(i' > i)(\exists x \in M)(i' > x)$.

Poznámka k úloze 8. Zápis $\sup M = +\infty$ lze chápat jako zkrácené tvrzení, že množina M není shora omezená.

Úloha 1

Zadání Úloha 1

Dokažte, že

$$\inf \left\{ \frac{2n^2 + n + 11}{n^2 + 5} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 2.$$

Řešení. Označme

$$M_1 = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad a_n = \frac{2n^2 + n + 11}{n^2 + 5}.$$

1. vlastnost infima: číslo 2 je dolní závora.

Upravíme člen posloupnosti:

$$a_n = \frac{2n^2 + n + 11}{n^2 + 5} = 2 + \frac{n + 1}{n^2 + 5}.$$

Protože $n + 1 > 0$ a $n^2 + 5 > 0$, je

$$a_n > 2 \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Tedy $(\forall x \in M_1)(x \geq 2)$, takže 2 je dolní závora množiny M_1 .

2. vlastnost infima: žádná větší dolní závora už neexistuje.

Vezměme libovolné $i' > 2$. Chceme najít prvek množiny M_1 , který je menší než i' . Zvolme $n \in \mathbb{N}$ tak velké, aby

$$n > \frac{2}{i' - 2}.$$

Pak pro $n \geq 1$ platí $n + 1 \leq 2n$, a tedy

$$a_n - 2 = \frac{n + 1}{n^2 + 5} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < i' - 2.$$

Odtud dostáváme $a_n < i'$. Tím je splněna i druhá vlastnost infima.

Závěr. Podle Věty 6.8 ze skript MAT2 platí

$$\inf M_1 = 2.$$

Úloha 2

Zadání Úloha 2

Dokažte, že

$$\sup \left\{ \frac{2n^2 + n + 11}{n^2 + 5} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \frac{7}{3}.$$

Řešení. Opět označme

$$M_2 = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad a_n = \frac{2n^2 + n + 11}{n^2 + 5}.$$

1. vlastnost suprema: číslo $\frac{7}{3}$ je horní závora.

Stačí ověřit nerovnost $a_n \leq \frac{7}{3}$:

$$\frac{2n^2 + n + 11}{n^2 + 5} \leq \frac{7}{3} \iff 3(2n^2 + n + 11) \leq 7(n^2 + 5)$$

$$\iff n^2 - 3n + 2 \geq 0 \iff (n - 1)(n - 2) \geq 0.$$

Poslední nerovnost platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tedy $(\forall x \in M_2)(x \leq \frac{7}{3})$, a proto je $\frac{7}{3}$ horní závora.

2. vlastnost suprema: žádná menší horní závora už neexistuje.

Dokonce platí

$$a_1 = \frac{2 + 1 + 11}{1 + 5} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

Hodnota $\frac{7}{3}$ tedy v množině přímo leží. Vezmeme-li libovolné $s' < \frac{7}{3}$, pak pro prvek $a_1 \in M_2$ máme

$$s' < \frac{7}{3} = a_1.$$

Tím je splněna i druhá vlastnost suprema.

Závěr. Podle Věty 6.7 ze skript MAT2 platí

$$\sup M_2 = \frac{7}{3}.$$

Úloha 3

Zadání Úloha 3

Dokažte, že

$$\inf \left\{ \frac{(-1)^n(n^2 + 1)}{n^2 - 4n + 5} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = -5.$$

Řešení. Označme

$$M_3 = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad b_n = \frac{(-1)^n(n^2 + 1)}{n^2 - 4n + 5}.$$

Protože

$$n^2 - 4n + 5 = (n - 2)^2 + 1 > 0,$$

je jmenovatel vždy kladný.

Položme si ještě

$$c_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 4n + 5} > 0.$$

Ukážeme, že $c_n \leq 5$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 4n + 5} \leq 5 &\iff n^2 + 1 \leq 5n^2 - 20n + 25 \\ &\iff 4n^2 - 20n + 24 \geq 0 \iff 4(n - 2)(n - 3) \geq 0. \end{aligned}$$

Tato nerovnost platí pro všechna přirozená n .

1. vlastnost infima: číslo -5 je dolní závora.

Je-li n sudé, pak $b_n = c_n > 0$, tedy jistě $b_n \geq -5$. Je-li n liché, pak $b_n = -c_n$, a protože $c_n \leq 5$, dostáváme

$$b_n = -c_n \geq -5.$$

Tedy $(\forall x \in M_3)(x \geq -5)$, takže -5 je dolní závora množiny M_3 .

2. vlastnost infima: žádná větší dolní závora už neexistuje.

Máme

$$b_3 = \frac{(-1)^3(3^2 + 1)}{3^2 - 4 \cdot 3 + 5} = \frac{-10}{2} = -5.$$

Hodnota -5 tedy v množině přímo leží. Vezmeme-li libovolné $i' > -5$, pak pro prvek $b_3 \in M_3$ platí

$$b_3 = -5 < i'.$$

Druhá vlastnost infima je tím splněna.

Závěr. Platí

$$\inf M_3 = -5.$$

Úloha 4**Zadání Úloha 4**

Dokažte, že

$$\sup \left\{ \frac{(-1)^n(n^2 + 1)}{n^2 - 4n + 5} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 5.$$

Řešení. Zůstáváme u téže množiny

$$M_4 = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad b_n = \frac{(-1)^n(n^2 + 1)}{n^2 - 4n + 5}.$$

Z předchozí úlohy už víme, že

$$0 < c_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 4n + 5} \leq 5.$$

1. vlastnost suprema: číslo 5 je horní závora.

Je-li n sudé, pak $b_n = c_n \leq 5$. Je-li n liché, pak $b_n = -c_n \leq 0 \leq 5$. Tedy $(\forall x \in M_4)(x \leq 5)$, a proto je 5 horní závora.

2. vlastnost suprema: žádná menší horní závora už neexistuje.

Platí

$$b_2 = \frac{(-1)^2(2^2 + 1)}{2^2 - 4 \cdot 2 + 5} = \frac{5}{1} = 5.$$

Hodnota 5 tedy v množině leží. Pro libovolné $s' < 5$ pak máme

$$s' < 5 = b_2,$$

což je přesně druhá vlastnost suprema.

Závěr. Platí

$$\sup M_4 = 5.$$

Úloha 5

Zadání Úloha 5

Dokažte, že

$$\sup \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 1.$$

Řešení. Označme

$$M_5 = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad u_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Rozlišíme sudá a lichá n :

$$u_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & n \text{ sudé,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ liché.} \end{cases}$$

1. vlastnost suprema: číslo 1 je horní závora.

Je-li n sudé, pak $u_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$. Je-li n liché, pak $u_n = \frac{1}{n} \leq 1$. Tedy $(\forall x \in M_5)(x \leq 1)$, takže 1 je horní závora množiny M_5 .

2. vlastnost suprema: žádná menší horní závora už neexistuje.

Pro $n = 1$ dostaneme

$$u_1 = \frac{1 + (-1)}{2} + (-1)^2 \cdot 1 = 1.$$

Hodnota 1 tedy v množině přímo leží. Pro každé $s' < 1$ pak platí

$$s' < 1 = u_1.$$

Druhá vlastnost suprema je tedy splněna.

Závěr. Platí

$$\sup M_5 = 1.$$

Úloha 6

Zadání Úloha 6

Dokažte, že

$$\inf \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

Řešení. Zůstáváme u množiny

$$M_6 = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad u_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & n \text{ sudé,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ liché.} \end{cases}$$

1. vlastnost infima: číslo 0 je dolní závora.

Je-li n liché, pak $u_n = \frac{1}{n} > 0$. Je-li n sudé, pak $n \geq 2$, a proto

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Tedy $(\forall x \in M_6)(x \geq 0)$, takže 0 je dolní závora.

2. vlastnost infima: žádná větší dolní závora už neexistuje.

Vezměme libovolné $i' > 0$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$2k - 1 > \frac{1}{i'}.$$

Položme $n = 2k - 1$; to je liché přirozené číslo. Pak

$$u_n = \frac{1}{2k - 1} < i'.$$

Tím jsme našli prvek množiny M_6 , který je menší než libovolné $i' > 0$. Druhá vlastnost infima je splněna.

Závěr. Platí

$$\inf M_6 = 0.$$

Úloha 7

Zadání Úloha 7

Dokažte, že

$$\inf \left\{ \frac{3x + 1 - 2x^2}{x^2 + 5x} \mid x > 0 \right\} = -2.$$

Řešení. Označme

$$M_7 = \{f(x) \mid x > 0\}, \quad f(x) = \frac{3x + 1 - 2x^2}{x^2 + 5x}.$$

Protože pro $x > 0$ je jmenovatel kladný, můžeme bezpečně upravovat:

$$f(x) + 2 = \frac{3x + 1 - 2x^2 + 2x^2 + 10x}{x^2 + 5x} = \frac{13x + 1}{x^2 + 5x} > 0.$$

1. vlastnost infima: číslo -2 je dolní závora.

Z předchozí úpravy plyne pro každé $x > 0$:

$$f(x) > -2.$$

Tedy $(\forall y \in M_7)(y \geq -2)$, a proto je -2 dolní závora množiny M_7 .

2. vlastnost infima: žádná větší dolní závora už neexistuje.

Vezměme libovolné $i' > -2$. Potřebujeme najít $x > 0$, pro které bude $f(x) < i'$.

Pro $x \geq 1$ platí $13x + 1 \leq 14x$ a současně $x^2 + 5x \geq x^2$, takže

$$0 < f(x) + 2 = \frac{13x + 1}{x^2 + 5x} \leq \frac{14x}{x^2} = \frac{14}{x}.$$

Zvolíme-li nyní $x > \max\left\{1, \frac{14}{i' + 2}\right\}$, dostaneme

$$f(x) + 2 < i' + 2,$$

tedy $f(x) < i'$. Druhá vlastnost infima je splněna.

Závěr. Platí

$$\inf M_7 = -2.$$

Úloha 8**Zadání Úloha 8**

Dokažte, že

$$\sup \left\{ \frac{3x + 1 - 2x^2}{x^2 + 5x} \mid x > 0 \right\} = +\infty.$$

Řešení. Označme opět

$$M_8 = \{f(x) \mid x > 0\}, \quad f(x) = \frac{3x + 1 - 2x^2}{x^2 + 5x}.$$

Jak bylo uvedeno v úvodní poznámce, zde stačí ukázat, že množina M_8 není shora omezená.

Pro $0 < x \leq 1$ platí

$$3x + 1 - 2x^2 = 1 + x(3 - 2x) > 1$$

a současně

$$x^2 + 5x \leq x + 5x = 6x.$$

Proto pro $0 < x \leq 1$ dostáváme odhad

$$f(x) = \frac{3x + 1 - 2x^2}{x^2 + 5x} > \frac{1}{6x}.$$

Nyní vezměme libovolné číslo $K > 0$. Zvolíme $x > 0$ tak, aby

$$0 < x < \min\left\{1, \frac{1}{6K}\right\}.$$

Pak

$$f(x) > \frac{1}{6x} > K.$$

Tedy ke každému $K > 0$ existuje prvek množiny M_8 , který je větší než K . Množina M_8 tedy není shora omezená.

Závěr. V rozšířeném smyslu platí

$$\sup M_8 = +\infty.$$

Úloha 9

Zadání Úloha 9

Dokažte, že

$$\inf \left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

Řešení. Označme

$$M_9 = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Racionalizací dostaneme

$$v_n = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > 0.$$

1. vlastnost infima: číslo 0 je dolní závora.

Z předchozího vztahu je vidět, že $v_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $(\forall x \in M_9)(x \geq 0)$, takže 0 je dolní závora.

2. vlastnost infima: žádná větší dolní závora už neexistuje.

Z odhadu $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 2\sqrt{n}$ plyne

$$0 < v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Veźměme libovolné $i' > 0$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ tak velké, aby

$$n > \frac{1}{4(i')^2}.$$

Pak

$$v_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} < i'.$$

To je přesně druhá vlastnost infima.

Závěr. Platí

$$\inf M_9 = 0.$$

Úloha 10

Zadání Úloha 10

Dokažte, že

$$\sup \left\{ \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + x} \mid x > 0 \right\} = 2.$$

Řešení. Označme

$$M_{10} = \{g(x) \mid x > 0\}, \quad g(x) = \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + x}.$$

Pro $x > 0$ můžeme vytknout \sqrt{x} ve jmenovateli:

$$g(x) = \frac{2x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = 2 - \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = 2 - \frac{1}{1 + \sqrt{x}}.$$

1. vlastnost suprema: číslo 2 je horní závora.

Protože $x > 0$, je $1 + \sqrt{x} > 0$, a tedy

$$\frac{1}{1 + \sqrt{x}} > 0.$$

Odtud plyne

$$g(x) = 2 - \frac{1}{1 + \sqrt{x}} < 2 \quad \text{pro každé } x > 0.$$

Tedy $(\forall y \in M_{10})(y \leq 2)$, takže 2 je horní závora.

2. vlastnost suprema: žádná menší horní závora už neexistuje.

Vezměme libovolné $s' < 2$. Zvolme číslo $t > 0$ tak, aby

$$t > \max\left\{1, \frac{1}{2 - s'} - 1\right\}.$$

Položme $x = t^2 > 0$. Potom $\sqrt{x} = t$ a

$$g(x) = 2 - \frac{1}{1 + t} > 2 - (2 - s') = s'.$$

Našli jsme tedy prvek množiny M_{10} , který je větší než libovolné $s' < 2$. Druhá vlastnost suprema je splněna.

Závěr. Platí

$$\sup M_{10} = 2.$$

Shrnutí.

Ve většině úloh se osvědčil stále stejný postup:

- nejprve výraz upravit tak, aby byla horní nebo dolní závora vidět přímo,
- potom druhou vlastnost suprema nebo infima doložit buď dosažením extrému, nebo odhadem, který dovolí dostat se libovolně blízko k hledané hodnotě.