Pokročilejší limity posloupností – řešené příklady

Doplňující materiál k úlohám ze cvičení

Hlavní opora: kapitola 7 *Posloupnosti reálných čísel*; v dílčích úpravách používáme ještě běžné vlastnosti logaritmu a elementární funkční limity ze skripta MAT1.

Přímé úpravy a standardní součty

Příklad 1

Zadání

Určete limitu posloupnosti

$$a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}.$$

Postup

Použijeme součet aritmetické posloupnosti a potom Větu 7.16.

Platí

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Proto

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Protože $\frac{1}{n} \to 0$, dostáváme

$$a_n \to \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}.$$

Výsledek

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{1}{2}}$$

Příklad 2

Zadání

Určete limitu posloupnosti

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}.$$

Postup

Použijeme součet aritmetické posloupnosti a Větu 7.16.
Vytkneme $\frac{1}{n^2}$:

$$a_n = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + (n-1)).$$

Součet v závorce je

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Tedy

$$a_n = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Odtud hned plyne

$$a_n \to \frac{1}{2}.$$

Výsledek

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}}$$

Příklad 3

Zadání

Určete limitu posloupnosti

$$a_n = \frac{\ln n^2}{\ln n^3}.$$

Postup

Použijeme vlastnosti logaritmu a Větu 7.16.
Pro $n > 1$ platí

$$\ln n^2 = 2\ln n, \qquad \ln n^3 = 3\ln n.$$

Proto

$$a_n = \frac{2\ln n}{3\ln n} = \frac{2}{3}.$$

Od určitého indexu je tedy posloupnost dokonce konstantní.

Výsledek

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n^2}{\ln n^3} = \frac{2}{3}}$$

Racionalizace a dominantní člen

Příklad 4

Zadání

Určete limitu posloupnosti
$$a_n = n^{3/2}\left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right).$$

Postup

Použijeme racionalizaci rozdílů odmocnin a potom Větu 7.16.
Upravíme výraz v závorce na rozdíl dvou sousedních diferencí:
$$\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right).$$

Po racionalizaci dostaneme
$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}},$$
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Proto
$$a_n = n^{3/2}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right).$$

Sečtením na společný jmenovatel:
$$a_n = n^{3/2}\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}.$$

Ještě jednou racionalizujeme čitatel:
$$\sqrt{n} - \sqrt{n+2} = \frac{-2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}.$$

Tedy
$$a_n = \frac{-2n^{3/2}}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}.$$

V každé závorce vytkneme $\sqrt{n}$:
$$a_n = \frac{-2}{\left(1 + \sqrt{1+2/n}\right)\left(\sqrt{1+2/n} + \sqrt{1+1/n}\right)\left(\sqrt{1+1/n} + 1\right)}.$$

Nyní už můžeme přejít k limitě:
$$a_n \to \frac{-2}{(1+1)(1+1)(1+1)} = -\frac{1}{4}.$$

Výsledek

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^{3/2}\left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) = -\frac{1}{4}}$$

Příklad 5

Zadání

Určete limitu posloupnosti

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+1} + 2\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n^3+n} - 3n}.$$

Postup

Použijeme vytknutí dominantního řádu a Větu 7.16.
V čitateli je dominantní člen řádu n, ve jmenovateli také řádu n. Celý zlomek proto vydělíme n:

$$a_n = \frac{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} + \frac{2\sqrt{n+1}}{n}}{\frac{\sqrt[4]{n^3+n}}{n} - 3}.$$

Jednotlivé části upravíme:

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1,$$

$$\frac{2\sqrt{n+1}}{n} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow 0,$$

$$\frac{\sqrt[4]{n^3+n}}{n} = \frac{n^{3/4}\sqrt[4]{1+1/n^2}}{n} = \frac{\sqrt[4]{1+1/n^2}}{n^{1/4}} \longrightarrow 0.$$

Proto

$$a_n \longrightarrow \frac{1+0}{0-3} = -\frac{1}{3}.$$

Výsledek

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} + 2\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n^3+n} - 3n} = -\frac{1}{3}}$$

Příklad 6

Zadání

Určete limitu posloupnosti

$$a_n = n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}} - n\sqrt{2}\right).$$

Postup

Použijeme dvojitou racionalizaci.

Nejprve racionalizujeme vnější odmocninu:

$$a_n = n^3 \frac{n^2 + \sqrt{n^4+1} - 2n^2}{\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4+1}} + n\sqrt{2}} = n^3 \frac{\sqrt{n^4+1} - n^2}{\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4+1}} + n\sqrt{2}}.$$

Ještě racionalizujeme čitatel:

$$\sqrt{n^4+1} - n^2 = \frac{1}{\sqrt{n^4+1} + n^2}.$$

Tedy

$$a_n = \frac{n^3}{\left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4+1}} + n\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{n^4+1} + n^2\right)}.$$

Nyní vytkneme ve jmenovateli n, resp. n^2:

$$\sqrt{n^4+1} = n^2 \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}},$$

$$\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4+1}} = n\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}}.$$

Dostáváme tedy

$$a_n = \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \sqrt{1 + 1/n^4}} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1 + 1/n^4} + 1\right)}.$$

Po přechodu k limitě:

$$a_n \to \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{2})(1+1)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Výsledek

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^3 \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4+1}} - n\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}}}$$

Příklad 7

Zadání

Určete limitu posloupnosti

$$a_n = \sqrt[3]{n^3 + 3n^2} - \sqrt{n^2 - 2n}.$$

Postup

Použijeme rozklad na dva jednodušší rozdíly a racionalizaci.
Přičteme a odečteme n:

$$a_n = \left(\sqrt[3]{n^3 + 3n^2} - n\right) + \left(n - \sqrt{n^2 - 2n}\right).$$

Označme si tyto dva členy jako u_n a v_n.

První člen. Použijeme vzorec pro rozdíl třetích mocnin:

$$u_n = \frac{(n^3+3n^2)-n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2 + n\sqrt[3]{n^3+3n^2} + n^2} = \frac{3n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2 + n\sqrt[3]{n^3+3n^2} + n^2}.$$

Po vydělení n^2:

$$u_n = \frac{3}{\left(\sqrt[3]{1+3/n}\right)^2 + \sqrt[3]{1+3/n} + 1} \to \frac{3}{1+1+1} = 1.$$

Druhý člen. Racionalizací dostaneme

$$v_n = n - \sqrt{n^2-2n} = \frac{2n}{n+\sqrt{n^2-2n}}.$$

Po vydělení n:

$$v_n = \frac{2}{1+\sqrt{1-2/n}} \to \frac{2}{1+1} = 1.$$

Celkem tedy

$$a_n = u_n + v_n \to 1 + 1 = 2.$$

Výsledek

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2} - \sqrt{n^2-2n}\right) = 2}$$

Stolzův vzorec pro součtové posloupnosti

Příklad 8

Zadání

Určete limitu posloupnosti

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Postup

Použijeme Stolzův vzorec.
Zapišme posloupnost ve tvaru

$$a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}.$$

Označme

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \qquad B_n = n.$$

Pak B_n roste a $B_n \to +\infty$, takže můžeme použít Stolzův vzorec:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{A_{n+1}-A_n}{B_{n+1}-B_n}.$$

Spočítáme diference:

$$A_{n+1} - A_n = \frac{1}{n+1}, \qquad B_{n+1} - B_n = 1.$$

Tedy

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)}{1} = 0.$$

Výsledek

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = 0}$$

Příklad 9

Zadání

Určete limitu posloupnosti

$$a_n = \frac{\ln n!}{n \ln n}.$$

Postup

Použijeme Stolzův vzorec.
Položme

$$A_n = \ln n!, \qquad B_n = n \ln n.$$

Pro $n \geq 2$ je $B_n > 0$, posloupnost B_n roste a $B_n \to +\infty$. Můžeme tedy použít Stolzův vzorec:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n}.$$

Diference jsou

$$A_{n+1} - A_n = \ln(n+1),$$

$$B_{n+1} - B_n = (n+1)\ln(n+1) - n \ln n.$$

Jmenovatel upravíme:

$$(n+1)\ln(n+1) - n\ln n = \ln(n+1) + n\big(\ln(n+1) - \ln n\big)$$

$$= \ln(n+1) + n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1) + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Podle Věty 7.25 platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e},$$

proto po zlogaritmování
$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 1.$$
Současně $\ln(n+1) \longrightarrow +\infty$, a tedy
$$\frac{n \ln(1 + 1/n)}{\ln(n+1)} \longrightarrow 0.$$
Odtud už plyne
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Výsledek

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n!}{n \ln n} = 1}$$

Příklad 10

Zadání

Určete limitu posloupnosti
$$a_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{(\sqrt{n})^3} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^{3/2}}.$$

Postup

Použijeme Stolzův vzorec.
Označme
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}, \qquad B_n = n^{3/2}.$$
Posloupnost B_n roste a $B_n \longrightarrow +\infty$, proto použijeme Stolze:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^{3/2} - n^{3/2}}.$$
Nyní označme
$$a = \sqrt{n+1}, \qquad b = \sqrt{n}.$$
Pak
$$(n+1)^{3/2} - n^{3/2} = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$
Protože
$$a - b = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{a+b},$$
platí
$$\frac{a}{a^3 - b^3} = \frac{a(a+b)}{a^2 + ab + b^2}.$$

Po vrácení zpět dostaneme

$$\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^{3/2}-n^{3/2}} = \frac{n+1+\sqrt{n(n+1)}}{n+1+\sqrt{n(n+1)}+n}.$$

Teď už stačí vydělit n:

$$\frac{1+1/n+\sqrt{1+1/n}}{1+1/n+\sqrt{1+1/n}+1} \to \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}.$$

Tedy

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

Výsledek

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{(\sqrt{n})^3} = \frac{2}{3}}$$

Exponenciální typ, n-té odmocniny a logaritmy

Příklad 11

Zadání

Určete limitu posloupnosti

$$a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Postup

Použijeme Cauchyho vzorec a limitní vzorec s číslem e.
Posloupnost je kladná, takže můžeme zkoumat podíl sousedních členů:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Upravíme jej na tvar s číslem e:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}.$$

Podle Věty 7.26 je

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to \mathrm{e}^{-1},$$

a zároveň $1-\frac{1}{n+1} \to 1$. Proto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathrm{e}^{-1}.$$

Cauchyho vzorec nyní dává

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \mathrm{e}^{-1}.$$

Protože $\mathrm{e}^{-1} < 1$, existuje číslo q takové, že $\mathrm{e}^{-1} < q < 1$ a pro všechna dost velká n platí $\sqrt[n]{a_n} < q$. Odtud

$$0 < a_n < q^n.$$

Podle Lemma 7.27 je $q^n \to 0$, a tedy i $a_n \to 0$.

Výsledek

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0}$$

Příklad 12

Zadání

Určete limitu posloupnosti

$$a_n = \left(1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}.$$

Postup

Použijeme logaritmování; zde navážeme na běžnou funkční limitu z MAT1 $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
Položme

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Pak $u_n \to 0$ a

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Proto

$$\sqrt{n}\, u_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to \frac{1}{2}.$$

Nyní vezmeme logaritmus:

$$\ln a_n = \sqrt{n}\, \ln(1 + u_n) = \frac{\ln(1 + u_n)}{u_n} \cdot \sqrt{n}\, u_n.$$

První faktor směřuje k jedné, druhý faktor k $\frac{1}{2}$, tedy

$$\ln a_n \to \frac{1}{2}.$$

Spojitostí exponenciální funkce dostaneme

$$a_n \to \mathrm{e}^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

Výsledek

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}=\sqrt{\mathrm{e}}}$$

Příklad 13

Zadání

Určete limitu posloupnosti

$$a_n=\sqrt[n]{2^n+7^n+\left(\frac{3}{2}\right)^n}.$$

Postup

Použijeme sevření dominantním členem 7^n.
Pro všechna $n\in\mathbb{N}$ platí

$$7^n\le 2^n+7^n+\left(\frac{3}{2}\right)^n\le 3\cdot 7^n.$$

Po odmocnění n-tého stupně dostaneme

$$7\le a_n\le 7\sqrt[n]{3}.$$

Stačí tedy určit limitu posloupnosti $\sqrt[n]{3}$. Platí

$$\sqrt[n]{3}=\mathrm{e}^{\frac{\ln 3}{n}}.$$

Protože podle Lemma 7.29 je $\frac{1}{n}\to 0$, máme

$$\frac{\ln 3}{n}\to 0.$$

Spojitostí exponenciální funkce tedy

$$\sqrt[n]{3}\to \mathrm{e}^0=1.$$

Ze sevření

$$7\le a_n\le 7\sqrt[n]{3}\to 7$$

plyne

$$a_n\to 7.$$

Výsledek

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+7^n+\left(\frac{3}{2}\right)^n}=7}$$