

Parametrické křivky – řešené příklady

Doplňující materiál k úlohám ze cvičení

Hlavní opora: kapitola 4 *Polární souřadnice* a kapitola 5 *Křivky dané parametricky*; běžné derivace a určité integrály bereme ze skriptu MAT1.

Použité výsledky ze skriptu

Přehled vzorců, které	se v řešeních opakují.
Převod z polárních do kartézských souřadnic	$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi.$
Tečna parametrické křivky	$\dot{Y}(t_0)(x - X(t_0)) = \dot{X}(t_0)(y - Y(t_0)).$
Plocha pod parametrickou křivkou	$A = \int_{\alpha}^{\beta} Y(t) \dot{X}(t) dt.$
Délka parametrické křivky	$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{X}(t)^2 + \dot{Y}(t)^2} dt.$
Délka v polárních souřadnicích	$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2} d\varphi.$
Povrch při rotaci kolem osy x	$P_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} Y(t) \sqrt{\dot{X}(t)^2 + \dot{Y}(t)^2} dt.$
Plocha v polárních souřadnicích	$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)^2 d\varphi.$

Pracovní poznámka. Když parametrizace není na celém intervalu prostá, rozdělíme interval na části, kde prostá je, nebo křivku nejprve přepíšeme jako běžný graf funkce v kartézských souřadnicích.

Úloha 1 – Tečny ke křivkám zadaným parametricky

1(a)

Zadání

Určete tečny ke křivce

$$x = t^2 - 2t + 1, \quad y = t^4 - 4t^2 + 4$$

v bodě $(1, 4)$.

Postup

Použijeme Větu 5.2 o rovnici tečny.

Nejprve ověříme, pro které hodnoty parametru dostaneme bod $(1, 4)$:

$$t^2 - 2t + 1 = 1 \iff t^2 - 2t = 0 \iff t(t - 2) = 0.$$

Dostáváme tedy dvě hodnoty parametru: $t = 0$ a $t = 2$. Bod $(1, 4)$ leží na křivce dvakrát, proto musíme spočítat dvě tečny.

Derivace jsou

$$\dot{x}(t) = 2t - 2, \quad \dot{y}(t) = 4t^3 - 8t.$$

Pro $t_0 = 0$:

$$\dot{x}(0) = -2, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Rovnice tečny je

$$0 \cdot (x - 1) = (-2)(y - 4),$$

tedy

$$y = 4.$$

Pro $t_0 = 2$:

$$\dot{x}(2) = 2, \quad \dot{y}(2) = 16.$$

Rovnice tečny je

$$16(x - 1) = 2(y - 4).$$

Po úpravě dostaneme

$$y = 8x - 4.$$

Výsledek

V bodě $(1, 4)$ má křivka dvě tečny:

$$\boxed{y = 4}, \quad \boxed{y = 8x - 4}.$$

1(b)

Zadání

Určete tečnu ke křivce

$$x = 2t, \quad y = \cos(\pi t)$$

pro $t = 0$.

Postup

Použijeme Větu 5.2 o rovnici tečny.

Nejprve spočítáme bod a derivace:

$$X(0) = 0, \quad Y(0) = \cos 0 = 1,$$

$$\dot{x}(t) = 2, \quad \dot{y}(t) = -\pi \sin(\pi t), \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Tečna tedy splňuje

$$0 \cdot (x - 0) = 2(y - 1),$$

a proto

$$y = 1.$$

Výsledek

$$\boxed{y = 1}.$$

1(c)

Zadání

Určete tečnu ke křivce

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t$$

pro $t = \frac{\pi}{4}$.**Postup***Použijeme Větu 5.2 o rovnici tečny.*

Nejprve tečný bod:

$$X\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad Y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Derivace jsou

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t) = -3 \cos^2 t \sin t, \\ \dot{y}(t) &= 3 \sin^2 t \cos t.\end{aligned}$$

V bodě $t_0 = \frac{\pi}{4}$ dostaneme

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad \dot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Rovnice tečny tedy je

$$\frac{3\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \left(y - \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Po zkrácení dostaneme

$$x - \frac{\sqrt{2}}{4} = -y + \frac{\sqrt{2}}{4},$$

tedy

$$x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Výsledek

$$x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1(d)

Zadání

Určete tečnu ke křivce

$$x = \frac{1}{t}, \quad y = t^2 + 1$$

pro $t = 1$.

Postup

Použijeme Větu 5.2 o rovnici tečny.

Tečný bod je

$$X(1) = 1, \quad Y(1) = 2.$$

Derivace:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{t^2}, \quad \dot{y}(t) = 2t.$$

V bodě $t_0 = 1$ tedy

$$\dot{x}(1) = -1, \quad \dot{y}(1) = 2.$$

Tečna splňuje rovnici

$$2(x - 1) = -(y - 2).$$

Po úpravě dostaneme

$$y = -2x + 4.$$

Výsledek

$$y = -2x + 4.$$

Úloha 2 – Tečny v polárních souřadnicích a převod do kartézského tvaru**2(a)****Zadání**

Určete tečnu ke křivce

$$r = \frac{\sin \varphi - \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi}$$

pro $\varphi = 0$ a výsledek převedte do kartézského tvaru.

Postup

Použijeme nejprve Větu 4.2, potom Větu 5.2.

Úhel φ budeme chápat jako parametr. Z převodu z polárních souřadnic dostaneme

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi.$$

Pro $\varphi = 0$ je

$$r(0) = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1,$$

tedy tečný bod je

$$(x_0, y_0) = (-1, 0).$$

Nyní spočítáme derivaci r :

$$r'(\varphi) = \frac{2}{(\sin \varphi + \cos \varphi)^2}.$$

V bodě $\varphi = 0$ tedy

$$r'(0) = 2.$$

Proto

$$\dot{x}(\varphi) = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi, \quad \dot{y}(\varphi) = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi,$$

a po dosazení $\varphi = 0$ dostaneme

$$\dot{x}(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = -1.$$

Rovnice tečny je tedy

$$-1(x - (-1)) = 2(y - 0).$$

Po úpravě:

$$x + 2y + 1 = 0.$$

Výsledek

$$x + 2y + 1 = 0.$$

2(b)

Zadání

Určete tečnu ke křivce

$$r = \frac{5}{4 - \cos \varphi}$$

pro $\varphi = \frac{\pi}{6}$ a výsledek převedte do kartézského tvaru.

Postup

Použijeme nejprve Větu 4.2, potom Větu 5.2.

Zavedeme parametrický popis

$$x(\varphi) = \frac{5 \cos \varphi}{4 - \cos \varphi}, \quad y(\varphi) = \frac{5 \sin \varphi}{4 - \cos \varphi}.$$

Tečný bod pro $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ je

$$x_0 = \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{4 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{8 - \sqrt{3}}, \quad y_0 = \frac{5 \cdot \frac{1}{2}}{4 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{8 - \sqrt{3}}.$$

Nejprve spočítáme derivaci r :

$$r'(\varphi) = -\frac{5 \sin \varphi}{(4 - \cos \varphi)^2}.$$

Odtud

$$\dot{x}(\varphi) = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi = -\frac{20 \sin \varphi}{(4 - \cos \varphi)^2},$$

$$\dot{y}(\varphi) = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi = \frac{5(4 \cos \varphi - 1)}{(4 - \cos \varphi)^2}.$$

Po dosazení $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ dostaneme

$$\dot{x}_0 = -\frac{40}{(8 - \sqrt{3})^2}, \quad \dot{y}_0 = \frac{20(2\sqrt{3} - 1)}{(8 - \sqrt{3})^2}.$$

Tečna proto splňuje

$$\frac{20(2\sqrt{3}-1)}{(8-\sqrt{3})^2}(x-x_0) = -\frac{40}{(8-\sqrt{3})^2}(y-y_0).$$

Po zkrácení:

$$(2\sqrt{3}-1)(x-x_0) + 2(y-y_0) = 0.$$

Ještě dopočítáme konstantu:

$$(2\sqrt{3}-1)x_0 + 2y_0 = \frac{5(2\sqrt{3}-1)\sqrt{3}+10}{8-\sqrt{3}} = \frac{5(6-\sqrt{3})+10}{8-\sqrt{3}} = \frac{5(8-\sqrt{3})}{8-\sqrt{3}} = 5.$$

Tedy výsledná kartézská rovnice tečny je

$$(2\sqrt{3}-1)x + 2y = 5.$$

Výsledek

$$(2\sqrt{3}-1)x + 2y = 5.$$

Úloha 3 – Body s horizontální a vertikální tečnou

3(a)

Zadání

Najděte body, ve kterých má křivka

$$x = t^2 - 2t, \quad y = t^3 - 3t^2 + 2t$$

vertikální a horizontální tečny.

Postup

Použijeme Větu 5.2.

Spočítáme derivace:

$$\dot{x}(t) = 2t - 2 = 2(t-1), \quad \dot{y}(t) = 3t^2 - 6t + 2 = 3(t-1)^2 - 1.$$

Horizontální tečna. Potřebujeme $\dot{y}(t) = 0$ a zároveň $\dot{x}(t) \neq 0$:

$$3(t-1)^2 - 1 = 0 \iff (t-1)^2 = \frac{1}{3} \iff t = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Položme $u = t - 1$. Pak

$$\begin{aligned} x &= t^2 - 2t = (t-1)^2 - 1 = u^2 - 1, \\ y &= t^3 - 3t^2 + 2t = t(t-1)(t-2) = (u+1)u(u-1) = u^3 - u. \end{aligned}$$

Pro $u = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ dostaneme

$$x = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}, \quad y = u \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = -\frac{2u}{3}.$$

Tedy body s horizontální tečnou jsou

$$\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right), \quad \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right).$$

Vertikální tečna. Potřebujeme $\dot{x}(t) = 0$ a zároveň $\dot{y}(t) \neq 0$:

$$2(t-1) = 0 \iff t = 1.$$

Pak

$$\dot{y}(1) = -1 \neq 0,$$

a tedy vertikální tečna opravdu nastává. Bod je

$$x(1) = 1 - 2 = -1, \quad y(1) = 1 - 3 + 2 = 0.$$

Výsledek

Horizontální tečny má křivka v bodech

$$\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right), \quad \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right).$$

Vertikální tečnu má v bodě

$$(-1, 0).$$

3(b)

Zadání

Najděte body, ve kterých má křivka

$$x = 3 + 2 \sin t, \quad y = 2 + 5 \sin t$$

vertikální a horizontální tečny.

Postup

Nejprve odstraníme parametr. Z první rovnice dostaneme

$$\sin t = \frac{x-3}{2}.$$

Po dosazení do druhé rovnice:

$$y = 2 + 5 \cdot \frac{x-3}{2} = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}.$$

Geometrická křivka je tedy pouze část přímky

$$y = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}.$$

V regulárních bodech (kde $\cos t \neq 0$) je

$$\dot{x}(t) = 2 \cos t, \quad \dot{y}(t) = 5 \cos t, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{5}{2}.$$

Sklon tečny je tedy pořád stejný; není ani horizontální, ani vertikální.

Pro $\cos t = 0$ vychází $\dot{x} = \dot{y} = 0$, takže parametrizace v těchto bodech na okamžik „zastaví“, ale geometrická křivka je stále tatáž přímka. Ani zde nevznikne horizontální ani vertikální tečna.

Výsledek

Křivka **nemá žádnou horizontální ani vertikální tečnu**. Jde o část přímky

$$y = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}.$$

Úloha 4 – Délky křivek

4(a)

Zadání

Spočtěte délku křivky

$$x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t, \quad t \in [0, \pi].$$

Postup

Použijeme Větu 5.4 o délce parametrické křivky.

Derivace:

$$\dot{x}(t) = e^t(\sin t + \cos t), \quad \dot{y}(t) = e^t(\cos t - \sin t).$$

Proto

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 &= e^{2t}((\sin t + \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2) \\ &= e^{2t} \cdot 2. \end{aligned}$$

Délka je tedy

$$L = \int_0^\pi \sqrt{2e^{2t}} \, dt = \sqrt{2} \int_0^\pi e^t \, dt = \sqrt{2} [e^t]_0^\pi.$$

Výsledek

$$L = \sqrt{2} (e^\pi - 1).$$

4(b)

Zadání

Spočítejte délku křivky

$$x = t^2, \quad y = t^3, \quad t \in [0, 1].$$

Postup*Použijeme Větu 5.4 o délce parametrické křivky.*

Derivace jsou

$$\dot{x}(t) = 2t, \quad \dot{y}(t) = 3t^2.$$

Tedy

$$L = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 9t^4} \, dt = \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2} \, dt.$$

Použijeme substituci

$$u = 4 + 9t^2, \quad du = 18t \, dt.$$

Pak

$$L = \frac{1}{18} \int_4^{13} \sqrt{u} \, du = \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} [u^{3/2}]_4^{13}.$$

Výsledek

$$L = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}.$$

4(c)

Zadání

Spočítejte délku křivky v polárních souřadnicích

$$r = e^{2\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Postup*Použijeme Větu 5.5 o délce křivky v polárních souřadnicích.*

Máme

$$r(\varphi) = e^{2\varphi}, \quad \dot{r}(\varphi) = 2e^{2\varphi}.$$

Proto

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{4\varphi} + 4e^{4\varphi}} \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{5} e^{2\varphi} \, d\varphi.$$

Po integraci:

$$L = \sqrt{5} \left[\frac{1}{2} e^{2\varphi} \right]_0^{2\pi}.$$

Výsledek

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} (e^{4\pi} - 1).$$

4(d)

Zadání

Spočtěte délku křivky

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right].$$

Postup*Použijeme Větu 5.4 o délce parametrické křivky.*

Derivace jsou

$$\dot{x}(t) = -2 \sin t, \quad \dot{y}(t) = 2 \cos t.$$

Tedy

$$\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = 2.$$

Délka oblouku je

$$L = \int_0^{\pi/6} 2 \, dt = 2 \cdot \frac{\pi}{6}.$$

Výsledek

$$L = \frac{\pi}{3}.$$

Úloha 5 – Povrchy rotačních těles při rotaci kolem osy x

5(a)

Zadání

Spočtěte povrch tělesa vzniklého rotací křivky

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad t \in [0, \pi]$$

kolem osy x .**Postup***Použijeme Větu 5.8 o povrchu rotující parametrické křivky kolem osy x .*

Derivace jsou

$$\dot{x}(t) = -r \sin t, \quad \dot{y}(t) = r \cos t.$$

Proto

$$\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = r.$$

Povrch je

$$P = 2\pi \int_0^\pi r \sin t \cdot r \, dt = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin t \, dt.$$

A protože

$$\int_0^\pi \sin t \, dt = 2,$$

dostaneme

$$P = 4\pi r^2.$$

Výsledek

$$P = 4\pi r^2.$$

5(b)

Zadání

Spočítejte povrch tělesa vzniklého rotací kolem osy x pro křivku

$$y^2 - 2 \ln y = 4x, \quad y \in [1, 2].$$

Použijte parametrizaci $y = t$.

Postup

Použijeme Větu 5.8 o povrchu rotující parametrické křivky kolem osy x .

Z parametrizace $y = t$ dostaneme

$$x(t) = \frac{t^2 - 2 \ln t}{4}, \quad y(t) = t, \quad t \in [1, 2].$$

Derivace:

$$\dot{x}(t) = \frac{2t - 2/t}{4} = \frac{t^2 - 1}{2t}, \quad \dot{y}(t) = 1.$$

Proto

$$\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = \sqrt{\frac{(t^2 - 1)^2}{4t^2} + 1} = \sqrt{\frac{t^4 + 2t^2 + 1}{4t^2}} = \frac{t^2 + 1}{2t},$$

protože na intervalu $[1, 2]$ je $t > 0$.

Povrch tedy vyjde

$$P = 2\pi \int_1^2 t \cdot \frac{t^2 + 1}{2t} \, dt = \pi \int_1^2 (t^2 + 1) \, dt.$$

Po integraci:

$$P = \pi \left[\frac{t^3}{3} + t \right]_1^2.$$

Výsledek

$$P = \frac{10\pi}{3}.$$

5(c)

Zadání

Spočítejte povrch tělesa vzniklého rotací kolem osy x pro křivku

$$4y = x^3, \quad x \in [0, 1].$$

Postup

Použijeme Větu 5.8 o povrchu rotující parametrické křivky kolem osy x .
Zvolíme parametrizaci

$$x = t, \quad y = \frac{t^3}{4}, \quad t \in [0, 1].$$

Derivace jsou

$$\dot{x}(t) = 1, \quad \dot{y}(t) = \frac{3t^2}{4}.$$

Proto

$$\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = \sqrt{1 + \frac{9t^4}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{16 + 9t^4}.$$

Povrch je

$$P = 2\pi \int_0^1 \frac{t^3}{4} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{16 + 9t^4} dt = \frac{\pi}{8} \int_0^1 t^3 \sqrt{16 + 9t^4} dt.$$

Substituce

$$u = 16 + 9t^4, \quad du = 36t^3 dt$$

dá

$$P = \frac{\pi}{288} \int_{16}^{25} \sqrt{u} du = \frac{\pi}{288} \cdot \frac{2}{3} [u^{3/2}]_{16}^{25}.$$

Výsledek

$$P = \frac{61\pi}{432}.$$

5(d)

Zadání

Spočítejte povrch tělesa vzniklého rotací kolem osy x pro křivku v polárních souřadnicích

$$r = e^\varphi, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Postup

Použijeme nejprve Větu 4.2, potom Větu 5.8.

Zapišeme křivku parametricky pomocí φ :

$$X(\varphi) = e^\varphi \cos \varphi, \quad Y(\varphi) = e^\varphi \sin \varphi.$$

Derivace:

$$\dot{X}(\varphi) = e^\varphi (\cos \varphi - \sin \varphi), \quad \dot{Y}(\varphi) = e^\varphi (\sin \varphi + \cos \varphi).$$

Proto

$$\begin{aligned} \sqrt{\dot{X}(\varphi)^2 + \dot{Y}(\varphi)^2} &= e^\varphi \sqrt{(\cos \varphi - \sin \varphi)^2 + (\sin \varphi + \cos \varphi)^2} \\ &= e^\varphi \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Pozor: funkce $X(\varphi)$ není na celém intervalu prostá, protože

$$\dot{X}(\varphi) = 0 \iff \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Proto interval rozdělíme na dvě části $[0, \pi/4]$ a $[\pi/4, \pi/2]$, na nichž je X prostá, a povrchy sečteme. Integrand je ale na obou částech stejný, takže rovnou dostaneme

$$P = 2\pi\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} e^{2\varphi} \sin \varphi \, d\varphi.$$

Primitivní funkce je

$$\int e^{2\varphi} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{1}{5} e^{2\varphi} (2 \sin \varphi - \cos \varphi).$$

Tedy

$$P = \frac{2\pi\sqrt{2}}{5} \left[e^{2\varphi} (2 \sin \varphi - \cos \varphi) \right]_0^{\pi/2}.$$

Výsledek

$$P = \frac{2\pi\sqrt{2}}{5} (2e^\pi + 1).$$

Úloha 6 – Plochy v křivce

6(a)

Zadání

Určete plochu pro křivku

$$x = t^2, \quad y = 4t^4 + 1.$$

Postup

Použijeme Větu 5.3 o ploše pod parametrickou křivkou; nejprve ale upravíme křivku do kartézského tvaru.

Z rovnice $x = t^2$ plyne $t^4 = x^2$. Křivka tedy splňuje

$$y = 4x^2 + 1, \quad x \geq 0.$$

Parametrizace $x = t^2$ navíc stejnou větev paraboly probíhá dvakrát, proto je přirozené vzít jen jeden prostý průchod (ekvivalentně například $t \geq 0$).

Plocha mezi touto křivkou a osou x by byla

$$A = \int_0^{\infty} (4x^2 + 1) dx.$$

Tento nevlastní integrál diverguje, protože už člen $\int_0^{\infty} 4x^2 dx$ je nekonečný.

Výsledek

Konečná plocha nevzniká; odpovídající nevlastní integrál diverguje.

6(b)

Zadání

Určete plochu pro křivku

$$x = \sin t, \quad y = 1 + \cos^2 t.$$

Postup

Použijeme Větu 5.3 o ploše pod parametrickou křivkou.

Aby byla funkce $X(t) = \sin t$ prostá, vezmeme jeden úplný průchod obloukem na intervalu

$$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Na tomto intervalu je $y \geq 0$ a

$$\dot{x}(t) = \cos t.$$

Podle vzorce ze skriptu tedy

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos^2 t) \cos t dt.$$

Využijeme sudost integrandu:

$$A = 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2 t) \cos t dt.$$

Položíme

$$u = \sin t, \quad du = \cos t dt.$$

Pak na intervalu $t \in [0, \pi/2]$ přechází u od 0 do 1, takže

$$A = 2 \int_0^1 (1 + (1 - u^2)) du = 2 \int_0^1 (2 - u^2) du.$$

Výsledek

$$A = \frac{10}{3}.$$

6(c)

Zadání

Určete plochu pro křivku

$$x = \tan t, \quad y = \frac{1}{\cos t}.$$

Postup

Na intervalu

$$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

je $x = \tan t$ prostá a popisuje hlavní větev křivky. Eliminací parametru dostaneme

$$y = \frac{1}{\cos t} = \sqrt{1 + \tan^2 t} = \sqrt{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Plocha mezi křivkou a osou x by tedy byla

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + x^2} \, dx.$$

Pro $x \geq 0$ platí

$$\sqrt{1 + x^2} \geq x,$$

proto podle srovnání

$$A \geq \int_0^{\infty} x \, dx = \infty.$$

Nevzniká tedy žádná konečná plocha.

Výsledek

Konečná plocha nevzniká; nevlastní integrál diverguje.

6(d)

Zadání

Určete plochu pro křivku

$$x = \frac{1}{t}, \quad y = \frac{1}{t^2}, \quad t \in (0, 3).$$

Postup

Z první rovnice máme $t = 1/x$, a proto

$$y = \frac{1}{t^2} = x^2.$$

Protože $t \in (0, 3)$, odpovídá tomu

$$x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right).$$

Plocha mezi křivkou a osou x by tedy byla

$$A = \int_{1/3}^{\infty} x^2 \, dx.$$

Tento nevlastní integrál diverguje, protože

$$\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}$$

a výraz $x^3/3$ roste do nekonečna.

Výsledek

Konečná plocha nevzniká; nevlastní integrál diverguje.

6(e)**Zadání**

Určete plochu uvnitř křivky v polárních souřadnicích

$$r = a \cos \varphi.$$

Postup

Použijeme Větu 4.6 o ploše v polárních souřadnicích.

Křivku jednou opíšeme při

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

protože právě zde je $r = a \cos \varphi \geq 0$.

Plocha je

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \, d\varphi.$$

Na symetrickém intervalu platí

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

tedy

$$A = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Výsledek

$$A = \frac{\pi a^2}{4}.$$

6(f)

Zadání

Určete plochu v polárních souřadnicích pro křivku

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Postup

Použijeme Větu 4.6 o ploše v polárních souřadnicích.

Plocha je

$$A = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{p^2}{(1 - \cos \varphi)^2} d\varphi.$$

Použijeme identitu

$$1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Pak

$$A = \frac{p^2}{8} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^4 \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Substituce

$$u = \frac{\varphi}{2}, \quad d\varphi = 2 du$$

dá

$$A = \frac{p^2}{4} \int_{\pi/8}^{\pi/4} \csc^4 u du.$$

Primitivní funkce je

$$\int \csc^4 u du = -\cot u - \frac{1}{3} \cot^3 u.$$

Proto

$$A = \frac{p^2}{4} \left[-\cot u - \frac{1}{3} \cot^3 u \right]_{\pi/8}^{\pi/4}.$$

Dosadíme

$$\cot \frac{\pi}{4} = 1, \quad \cot \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} + 1.$$

Po úpravě dostaneme

$$A = \frac{p^2}{4} \cdot \frac{2(3 + 4\sqrt{2})}{3}.$$

Výsledek

$$A = \frac{p^2}{6} (3 + 4\sqrt{2}).$$