1 Duální simplexová metoda

Duální simplexová metoda představuje zrcadlový obraz klasické (prvotní) simplexové metody. Namísto toho, abychom začínali v *prvotně přípustném* bázickém bodě a udržovali duální přípustnost postupným odstraňováním kladných redukovaných nákladů, vycházíme z báze, která je *duálně přípustná* (tj. $\mathbf{r} \leq \mathbf{0}$), avšak nemusí být prvotně přípustná (některé složky $\mathbf{p}$ jsou záporné). Cílem je iterativně odstraňovat záporné složky v $\mathbf{p}$, aniž bychom porušili duální přípustnost, až je dosaženo obou podmínek současně — což znamená optimum.

Vycházíme z rovnicového tvaru úlohy a obecné simplexové tabulky definované dříve:

$$\boxed{\mathbf{x}_B = \mathbf{p} + Q\,\mathbf{x}_N, \qquad z = z_0 + \mathbf{r}^\mathsf{T}\mathbf{x}_N.}$$

1.1 Duální přípustnost a kritérium optimality

Pro simplexovou tabulku tvaru

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{p} + Q\,\mathbf{x}_N, \qquad z = z_0 + \mathbf{r}^\mathsf{T}\mathbf{x}_N,$$

platí:

(1) Prvotní přípustnost. Vektor $\mathbf{p} = A_B^{-1}\mathbf{b}$ obsahuje hodnoty bázických proměnných. Bázické řešení $\mathbf{x}_B = \mathbf{p}$ je tedy *prvotně přípustné*, právě když

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0},$$

protože všechny proměnné musí splňovat podmínku nezápornosti.

(2) Duální přípustnost. Pro maximalizační úlohu platí, že zvýší-li se některá nebázická proměnná $\mathbf{x}_N$, hodnota účelové funkce se změní o $\mathbf{r}^\mathsf{T}\mathbf{x}_N$. Aby žádná nebázická proměnná nemohla zlepšit hodnotu účelové funkce, musí být

$$\mathbf{r} \leq \mathbf{0}.$$

Tomu říkáme *duální přípustnost*. Geometricky odpovídá tomu, že přidáním žádné hrany polyedru nelze jít „nahoru“.

(3) Kritérium optimality. Při současném splnění obou podmínek

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{r} \leq \mathbf{0}$$

není možné:

- porušit žádné omezení nezápornosti (protože $\mathbf{p} \geq 0$),
- zlepšit hodnotu účelové funkce (protože všechna $r_j \leq 0$).

Takový bod je tedy bázickým přípustným řešením, ze kterého nelze provést žádný zlepšující pivot — jde o **optimální řešení**.

Poznámka 8.1: Srovnání s klasickou simplexovou metodou

Klasická metoda udržuje po celou dobu *prvotní přípustnost* ($\mathbf{p} \geq 0$) a postupně odstraňuje porušení *duální přípustnosti* ($\mathbf{r} \leq 0$). Duální simplex postupuje opačně: udržuje *duální přípustnost* ($\mathbf{r} \leq 0$) a odstraňuje porušení *prvotní přípustnosti* (záporné složky v $\mathbf{p}$). Obě metody konvergují k situaci, kdy jsou splněny obě podmínky zároveň — tj. k optimu.

1.2 Pivotový krok duální simplexové metody

V každé iteraci se nejprve volí *řádek* (vystupující proměnná), poté *sloupec* (vstupující proměnná).

Duální simplex — jeden krok algoritmu

1. **Výběr klíčového řádku (vystupující proměnná).** Pokud již $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$, jsme v optimu. Jinak vybereme index

$$s \in \arg\min_i \; p_i,$$

tedy řádek s nejzápornější složkou. Tento řádek musí opustit bázi.

2. **Výběr klíčového sloupce (vstupující proměnná).** V klíčovém řádku uvažujeme koeficienty q_{sj}:

   (a) Pokud $q_{sj} \geq 0$ pro všechna nebázická j, nelze obnovit $\mathbf{p} \geq 0$. **Úloha je nepřípustná.**

   (b) Jinak pro všechna j s $q_{sj} < 0$ spočteme poměry

$$\theta_j = \frac{r_j}{-q_{sj}}$$

   a volíme

$$v \in \arg\min_{j:\, q_{sj}<0} \theta_j.$$

   Proměnná v sloupci v vstoupí do báze.

3. **Pivot.** Na prvku (s, v) provedeme Gaussovu eliminaci: normalizace klíčového prvku na 1 a vynulování ostatních prvků ve sloupci v (včetně řádku $\mathbf{r}$). Získáme novou bázi $B' = (B \setminus \{j_s\}) \cup \{v\}$.

4. **Opakuj.** Vraťte se ke kroku 1.

Poznámka 8.2: Zachování duální přípustnosti

Poměrový test $\theta_j = r_j/(-q_{sj})$ zajišťuje, že po pivotu zůstane $\mathbf{r} \leq 0$. Duální simplex tedy nikdy neporuší duální přípustnost, stejně jako klasický simplex nikdy neporuší přípustnost prvotní.

Degenerace a cyklení

Při degeneraci se stejně jako u klasické simplexové metody může stát, že krok je nulový (nezmění se hodnota účelu ani základní řešení). Konečnost algoritmu zajišťují standardní anticyklická pravidla, jako je např. Blandovo pravidlo nebo lexikografické pivotování.

1.3 Výchozí duálně přípustná báze: metoda umělých omezení

Pokud výchozí tabulka nesplňuje $\mathbf{r} \leq 0$, můžeme postupovat duálním analogem „metody velkého M", zde nazývaným *metoda umělých omezení*. Ta využívá jediné pomocné nerovnosti, která umožní přivést všechny r_j na nekladné hodnoty pivotováním.

Metoda umělých omezení — princip

1. Přidáme pomocné omezení tvaru

$$\sum_{j \in N} x_j \leq M$$

   s doplňkovou proměnnou $s_{n+1} \geq 0$, která vstoupí do báze.

2. Vybereme nebázický sloupec s $r_j > 0$ a pivotujeme v pomocném řádku tak, aby x_j vstoupila do báze a její nový redukovaný náklad se stal nulovým.
3. Opakujeme krok 2, dokud nejsou všechny složky $\mathbf{r}$ nekladné.
4. Spustíme duální simplexovou metodu, která odstraní záporné složky v $\mathbf{p}$.
5. Po dosažení prvotní přípustnosti odstraníme pomocné omezení a posoudíme, zda řešení závisí na M (detekce neomezenosti nebo nadbytečnosti).

Poznámka 8.3: Interpretace

Pomocné omezení plní roli „zásobníku", do něhož se přenášejí porušující redukované náklady. Každé pivotování na pomocném řádku eliminuje jeden prvek $r_j > 0$. Jakmile je dosaženo $\mathbf{r} \leq 0$, lze bezpečně pokračovat duálním simplem.